

水-土連成 FEM 解析手法における動水勾配の空間離散化

u-p 定式化における有限体積法に基づく連続式の離散化形式の精度向上

宇野 浩樹^{*1}・池上 浩樹^{*1}

Keywords : effective stress analysis, u-p formulation, continuity equation, finite volume method, hydraulic gradient, consolidation
有効応力解析, u-p 定式化, 連続式, 有限体積法, 動水勾配, 圧密

1. はじめに

圧密や液状化など, 水-土連成問題の地盤変形を記述する支配方程式は, 飽和土を土骨格と間隙水の二相系として扱う Biot の飽和多孔質体理論^{1), 2), 3), 4)}によって導かれる。支配方程式に対するいくつかの定式化⁵⁾のうち, 本研究では土骨格変位 u と間隙水圧 p を未知数とする u-p 定式化に着目する。本定式化は, 間隙水の動的挙動が近似的に考慮されるが, 通常の地震動における周波数の範囲や一般的な砂質土の透水係数までの範囲は適用可能であり⁵⁾, また, 他の定式化に比べて解くべき自由度数が少ないという利点があることから, 実用上は有限要素法(以下, FEM)などの離散化形式による数値シミュレーションが前述の連成問題の変位予測や対策設計などに広く用いられている。

u-p 定式化では飽和土のつり合い式と連続式を保存式とする。連続式の空間離散化に有限体積法⁶⁾(以下, FVM)を適用する場合, 要素から流出する間隙水の流量は要素境界面上の圧力勾配ベクトルまたは動水勾配ベクトルを用いて表す。ここで, これらの勾配ベクトルは, 従来, 当該の境界面で隣接する要素間の水圧差または水頭差を要素重心間の距離で除することで表現されるが, メッシュ分割方法によっては解析精度が低下するという課題がある。

そこで, 本研究では, このような u-p 定式化による連続式を FVM で離散化する場合の課題に対し, 要素境界面上における圧力勾配ベクトルのメッシュ依存性の低減とともに, 空間分解能の向上を可能にする解決策を提案する。さらに, その検証のために 2 次元圧密問題に適用し, 過剰間隙水圧分布などの数値解を理論

解と比較することで解決策の妥当性を確認する。

2. FVM による連続式の離散化

2.1 FVM による離散化形式

u-p 定式化に関する既往の研究^{例えば, 7), 8), 9), 10)}によると, FVM による連続式の空間離散化は, 要素内の土骨格変位を 1 次アイソパラメトリック要素で節点に離散化し, 要素内の間隙水圧を一定と仮定して当該要素に離散化する場合に適用される。具体的には, 加速度項と慣性力項を考慮しない, 準静的な問題の場合, 要素 E の領域 V_E をコントロールボリュームとする連続式の離散化形式が式(1)のように表される。なお, 式(1)において, ひずみは微小ひずみ, 土粒子は非圧縮とし, 間隙水の圧縮性を仮定している。さらに, ひずみの符号は引張側を正, 間隙水圧の符号は圧縮側を正としている。

$$-\int_{S_E} \frac{k}{\gamma^w} \left\{ \frac{\partial p^w}{\partial x} \right\}^T \{n\} dS = -\{K_E^p\}^T \{\dot{u}_N\} - K_E^p \dot{p}_E^w \quad (1)$$

ここに, 係数 K_E^p は

$$K_E^p = \int_{V_E} \frac{\varphi}{K^w} dV,$$

である。また, 式(1)の左辺は要素 E から流出する間隙水の全流量を表し, 右辺は単位時間当たりの土骨格の体積圧縮量から間隙水の体積圧縮量を差し引いた値を表す。さらに, k : 透水係数, γ^w : 間隙水の単位体積重量, $\{\partial p^w / \partial x\}$: 圧力勾配ベクトル, $\{n\}$: 要素境界面 S_E 上の外向き法線ベクトル, $\{\dot{u}_N\}$: 構成節点の速度ベクトル, $\{K_E^p\}^T$: $\{\dot{u}_N\}$ を要素 E の単位時間当たりの体積

* 1 技術センター 社会基盤技術研究部 地盤研究室

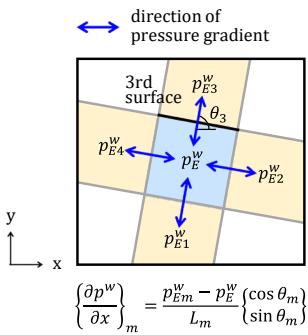


図-1 従来手法による圧力勾配ベクトルの計算
Fig.1 Calculation of hydraulic gradient vector with conventional method

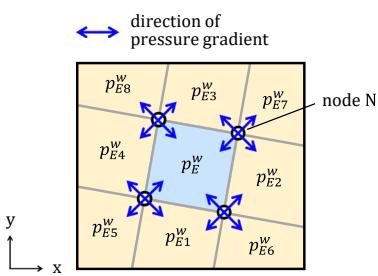


図-2 提案手法による圧力勾配ベクトルの計算
Fig.2 Calculation of hydraulic gradient vector with proposed method

変化量（引張：正）に変換するためのベクトル, φ ：間隙率, K^w ：間隙水の体積弾性係数, である。

2.2 従来手法における課題

図-1 の 2 次元メッシュの場合, 従来手法による要素 E の各境界面上の圧力勾配ベクトルは, それぞれの境界面で隣接する 4 つの要素との水圧差を要素重心間の距離で除すことで表現し, 式(1)の左辺, すなわち, 要素 E から流出する間隙水の全流量は, 圧力勾配ベクトルから求められる各境界面からの流出量を足し合わせることで表す。

ただし, 正解の圧力勾配ベクトルの方向が要素重心間の方向と常に一致するとは限らず, 両者の乖離の度合いなどが影響して, メッシュ分割方法によっては, 解析精度が低下する場合がある^{11), 12)}。また, 要素形状が歪な場合, 前述による圧力勾配ベクトルが要素間のどの領域に作用する値を表現しているのか, 不明瞭となることも解析精度が低下する要因と考えられる。

3. 精度向上のための提案手法

3.1 概要

本研究の提案手法において, 解析モデル内の圧力勾配ベクトルは, FEM で離散化した間隙水のつり合い式

に基づき, 節点で規定する。ここで, 図-2 の 2 次元メッシュの場合, 要素 E を構成する 4 つの節点での圧力勾配ベクトルは, 各節点を共有する周囲の 8 つの要素と要素 E の間隙水圧によって表すことができる。例えば, 図中の節点 N を共有する 4 つのいずれの要素も幅 $B \times$ 高さ H の長方形要素とすると, 節点 N に離散化される圧力勾配ベクトルは, 後述の体積 V_N^w の領域に作用する値として次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial p^w}{\partial x} \right\}_N &= -\frac{1}{V_N^w} [A_{E|N}^w] \{p_{E|N}^w\} \\ &= \frac{1}{BH} \begin{bmatrix} -H/2 & H/2 & H/2 & -H/2 \\ -B/2 & -B/2 & B/2 & B/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_E^w \\ p_{E7}^w \\ p_{E8}^w \\ p_{E3}^w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに, $\{\partial p^w / \partial x\}_N$: 節点 N に離散化される圧力勾配ベクトル, V_N^w : 間隙水のつり合い式の離散化過程で各要素から節点 N に離散化される体積の合計, $\{p_{E|N}^w\}$: 節点 N を共有する要素の間隙水圧 $p_{E|N}^w$ で構築されるベクトル, $[A_{E|N}^w]$: $\{p_{E|N}^w\}$ を等価節点力ベクトルに変換するためのマトリックス, である。

式(2)のように, 解析モデル内の圧力勾配ベクトルを節点で規定することにより, その空間分解能が向上するとともに, 要素境界面上における各ベクトルの方向の客観性が高まることでメッシュ依存性が低減する。

3.2 定式化

本節では, 後述の準静的な圧密問題に適用することを前提に, 加速度項と慣性力項を考慮しない場合の, FVM による連続式の離散化形式について説明する。

(1) 間隙水のつり合い式の空間離散化

準静的な圧密問題の場合, u - p 定式化では間隙水の運動が Darcy 則に基づく以下のつり合い式によって記述される。

$$\frac{\gamma^w}{k} v_i^{ws} = -\frac{\partial p^w}{\partial x_i} \quad (3)$$

ここに, v_i^{ws} : 流速ベクトル, γ^w : 間隙水の単位体積重量, k : 透水係数, p^w : 間隙水圧 (圧縮 : 正), $\partial p^w / \partial x_i$: 圧力勾配ベクトル, である。

ここで, 要素内の流速ベクトル v_i^{ws} は 1 次アイソパラメトリック要素によって節点に離散化し, 要素内の間隙水圧 p^w は要素内で一定と仮定して当該要素に離散化する。これにより, 式(3)の FEM による離散化形式が次式のようになる。

$$[C^w]\{\dot{w}_N\} - [K_E^v]\{p_E^w\} + [\theta_q^w]\{\lambda_q^w\} = -\{\bar{F}_p^w\} \quad (4)$$

ここに, $\{\dot{w}_N\}$: 節点の流速ベクトル, $\{p_E^w\}$: 要素の間隙水圧 p_E^w で構築されるベクトル, $\{\lambda_q^w\}$: 流量境界を満たすために作用させる間隙水圧 λ_q^w で構築されるベクトル, $[C^w]$: 透水に伴う抵抗マトリックス, $[K_E^v]$: $\{p_E^w\}$ を等価節点力ベクトルに変換するためのマトリックス, $[\theta_q^w]$: $\{\lambda_q^w\}$ を等価節点力ベクトルに変換するためのマトリックス, $\{\bar{F}_p^w\}$: 水圧境界に伴う等価節点力ベクトル, である。

なお, 間隙水圧 λ_q^w は, ラグランジュの未定乗数法により, 流量境界に以下の制約条件式を付加して求める。

$$[\theta_q^w]^T\{\dot{w}_N\} = \{\bar{Q}\} \quad (5)$$

ここに, $\{\bar{Q}\}$: 流量境界に伴う間隙水の流出量で構築されるベクトル, である。

(2) 節点における流速ベクトル

提案手法では透水に伴う抵抗マトリックス $[C^w]$ を非対角成分が 0 の集中マトリックス型で定義する。これにより, 式(4)から求められる節点 N の流速ベクトル $\{\dot{w}_N\}$ は, 次式のように, 節点 N の諸量のみによって簡潔に表現され, 他の節点の諸量とは非連成になる。

$$\{\dot{w}_N\} = \frac{k_N^w / \gamma^w}{V_N^w} ([A_{E|N}^w]\{p_{E|N}^w\} - [\theta_{q|N}^w]\{\lambda_{q|N}^w\} - \{\bar{F}_{p|N}^w\}) \quad (6)$$

ここに, $\{\dot{w}_N\}$: 節点 N の流速ベクトル, k_N^w : 節点 N における透水係数, $\{\lambda_{q|N}^w\}$: 流量境界を満たすために節点 N に作用させる間隙水圧 $\lambda_{q|N}^w$ で構築されるベクトル, $[\theta_{q|N}^w]$: $\{\lambda_{q|N}^w\}$ を等価節点力ベクトルに変換するためのマトリックス, $\{\bar{F}_{p|N}^w\}$: 水圧境界によって節点 N に作用する等価節点力ベクトル, である。

(3) FVM による連続式の離散化形式

式(1)の左辺は, 着目する要素 E から流出する間隙水の全流量であり, 以下のように表現できる。

$$-\int_{S_E} \frac{k}{\gamma^w} \left\{ \frac{\partial p^w}{\partial x} \right\}^T \{n\} dS = \sum_m \{A_N^m\}^T \{\dot{w}_N\} \quad (7)$$

ここに, $\{A_N^m\}^T$ は次のように構成節点に離散化される要素 E の境界面 m の面積ベクトルであり,

$$\{A_N^m\}^T = \int_{S_E^m} \{n\}^T [N] dS$$

さらに, N : 要素 E の構成節点, m : 要素 E の境界面

の面番号, $\{n\}$: 境界面 m における外向き法線ベクトル, $[N]$: 構成節点の変位ベクトルを要素内の変位ベクトルに変換するための形状マトリックス, である。

式(6)により, 式(7)の右辺が以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} & \sum_m \{A_N^m\}^T \{\dot{w}_N\} \\ &= \alpha_E^k p_E^w + \{\alpha_{Ei}^k\}^T \{p_{Ei}^w\} - \{\beta_{q|N}^k\}^T \{\lambda_{q|N}^w\} - \{\gamma_{p|N}^k\}^T \{\bar{F}_{p|N}^w\} \end{aligned} \quad (8)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \alpha_E^k p_E^w + \{\alpha_{Ei}^k\}^T \{p_{Ei}^w\} &= \sum_N \frac{k_N^w / \gamma^w}{V_N^w} \sum_m \{A_N^m\}^T [A_{E|N}^w] \{p_{E|N}^w\}, \\ \{\beta_{q|N}^k\}^T &= \frac{k_N^w / \gamma^w}{V_N^w} \sum_m \{A_N^m\}^T [\theta_{q|N}^w], \\ \{\gamma_{p|N}^k\}^T &= \frac{k_N^w / \gamma^w}{V_N^w} \sum_m \{A_N^m\}^T, \end{aligned}$$

であり, p_E^w : 要素 E の間隙水圧, $\{p_{Ei}^w\}$: 節点を要素 E と共有する別の要素 Ei の間隙水圧 p_{Ei}^w で構築されるベクトル, である。

式(7), 式(8)を式(1)に代入して整理すると, FVM によって要素 E に離散化される連続式が次式のようになる。

$$-\{K_E^v\}^T \{\dot{u}_N\} - K_E^p \dot{p}_E^w - \alpha_E^k p_E^w - \{\alpha_{Ei}^k\}^T \{p_{Ei}^w\} + \{\beta_{q|N}^k\}^T \{\lambda_{q|N}^w\} = -\{\gamma_{p|N}^k\}^T \{\bar{F}_{p|N}^w\} \quad (9)$$

(4) 制約条件式

式(6)を考慮して式(5)を整理すると, 節点 N に離散化される制約条件式が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{k_N^w / \gamma^w}{V_N^w} [\theta_{q|N}^w]^T ([A_{E|N}^w]\{p_{E|N}^w\} - [\theta_{q|N}^w]\{\lambda_{q|N}^w\}) \\ &= \{\bar{Q}_N\} + \frac{k_N^w / \gamma^w}{V_N^w} [\theta_{q|N}^w]^T \{\bar{F}_{p|N}^w\} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに, $\{\bar{Q}_N\}$: 流量境界によって節点 N に離散化される間隙水の流出量で構築されるベクトル, である。

3.3 解くべき方程式

最終的には, 以下の 3 種類の方程式を連立させて, ①節点の土骨格変位ベクトル $\{u_N\}$, ②要素の間隙水圧 p_E^w , ③流量境界を満たすために作用させる間隙水圧 λ_q^w , について解き, 飽和地盤モデルの各種挙動の数値解を求める。

- ① FEM で離散化した飽和土のつり合い式
- ② FVM で離散化した連続式 (式(9))

③ 流量境界を満たすための制約条件式 (式(10))

なお、①の方程式については、従来手法^{例えれば、10)}と同様に導出された、飽和土のつり合い式のFEMによる離散化形式を適用する。

4. 検証解析による妥当性確認

4.1 Mandel-Cryer 効果

本章では、Mandel-Cryer効果を伴う2次元圧密問題について、従来手法と提案手法によるシミュレーション解析を行い、それぞれの手法による数値解を理論解と比較することで提案手法の妥当性について検討する。

ここで、Mandel-Cryer効果とは、多次元における水-土連成問題特有の現象であり、間隙水の浸透による土骨格の体積変形が、間隙水の浸透の影響がまだ及んでいない領域の土骨格の体積変化を生じさせ、当該領域の間隙水圧が変化する現象である。Cryer(1963)によって導かれた球モデルの圧密に対する理論解¹³⁾がよく知られている。

4.2 解析条件

図-3に2次元平面ひずみ条件の解析モデルを示す。対象は幅 $B \times$ 高さ $H = 0.5\text{m} \times 0.25\text{m}$ の等方・等質な飽和地盤とした。メッシュ分割方法が解析結果に及ぼす影響を調べるために、地盤をCase1においては長方形要素のみで分割し、Case2では菱形要素と三角形要素を組み合わせて分割した。

土骨格はヤング率 2500kN/m^2 、ポアソン比 0.25 の線形弾性モデル、透水係数は $1.0 \times 10^{-4}\text{m/s}$ 、間隙水の単位体積重量は 9.81kN/m^3 とし、間隙率、間隙水の体積弾性係数はそれぞれ 0.5 、 $2.2 \times 10^6\text{kN/m}^2$ とした。

一連の解析においては、間隙水の圧縮性を仮定したため、まず、全外周面が非排水条件の下、モデル内の過剰間隙水圧分布が定常状態になるまで所定の表面力 100kN/m^2 を上面に作用させ、圧密開始時の初期状態とした。その後の圧密過程では、上面の表面力 100kN/m^2 を作用させたまま、右側面のみを排水条件とした。

直接時間積分法には後退差分法を用い、計算時間増分は後述の既往の研究¹⁴⁾を踏まえて $2.045 \times 10^{-3}\text{s}$ とした。

4.3 解析結果

(1) 初期状態

初期状態における応答値は、いずれのケースにおいても、既往の研究による理論解¹⁴⁾と一致した。詳細には上面の鉛直変位が -6.251mm 、右側面の水平変位が $+12.50\text{mm}$ となり、地盤モデルは、ほぼ等体積変形の条

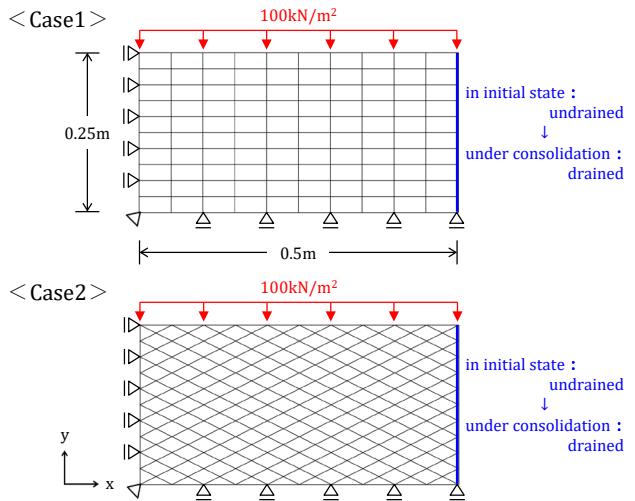


図-3 2次元圧密解析に用いた解析モデル
Fig.3 Numerical models applied for 2D consolidation analyses

件の下、一様に鉛直方向に圧縮して水平方向に伸張した。さらに、モデル内の過剰間隙水圧については一様に 49.98kPa に増加した。

(2) 圧密過程

圧密過程における解析結果として、右側面上の全節点の水平変位時刻歴とモデル内の全要素の同時刻における過剰間隙水圧分布を図-4～図-7に示す。ここに、水平変位 d_x 、過剰間隙水圧 Δp は前述の初期状態における応答値 $d_{x|t=0}$ 、 $\Delta p_{t=0}$ で正規化しており、また、いずれの図にもAbousleiman et al.(1996)によってBiotの方程式から導出された理論解¹⁴⁾を併記している。

図中の時間係数 T は透水係数や弾性係数などで正規化した時間に関する無次元量であり、前述の計算時間増分は時間係数増分で 2.5×10^{-4} に相当する¹⁴⁾。

いずれのケースの解析結果も、以下の特徴的な挙動は定性的に表現されている。

- ① 間隙水が右側面から排水されて d_x は減少し、すなわち、土骨格は間隙水の浸透によって鉛直・水平ともに圧縮する。
- ② 圧密開始直後に非排水面側の Δp は、Mandel-Cryer効果に伴い、一時的に初期値 $\Delta p_{t=0}$ よりも大きくなる。

ただし、図-4、図-5の従来手法による数値解を理論解と比較すると、Case1のメッシュ分割では、両者の各種挙動が良く一致しているものの、Case2のメッシュ分割による数値解は、圧密の進行度合いが理論解よりも速く、また、グラフ上では判別できないが、理論解と異なり、 Δp が鉛直方向に若干分布している。

一方、図-6、図-7の提案手法による解析結果では、従来手法のようなメッシュ依存性が生じておらず、ど

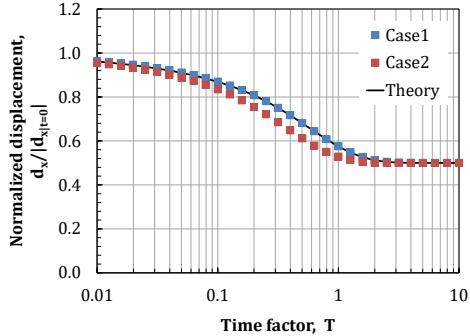


図-4 従来手法による水平変位時刻歴
Fig.4 Time histories of horizontal displacement with conventional method

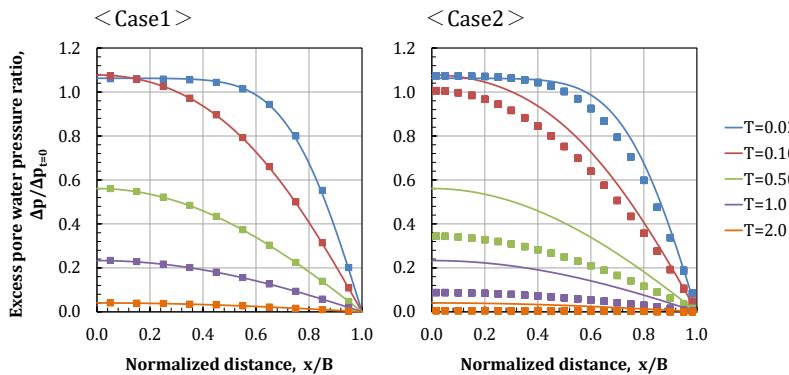


図-5 従来手法による過剰間隙水圧分布 (■: 数値解, 実線: 理論解)
Fig.5 Distributions of excess pore water pressure with conventional method (square mark: numerical solution, solid line: theoretical solution)

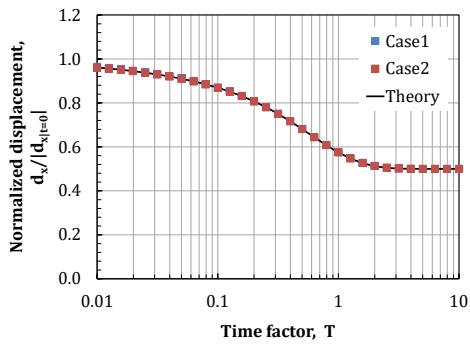


図-6 提案手法による水平変位時刻歴
Fig.6 Time histories of horizontal displacement with proposed method

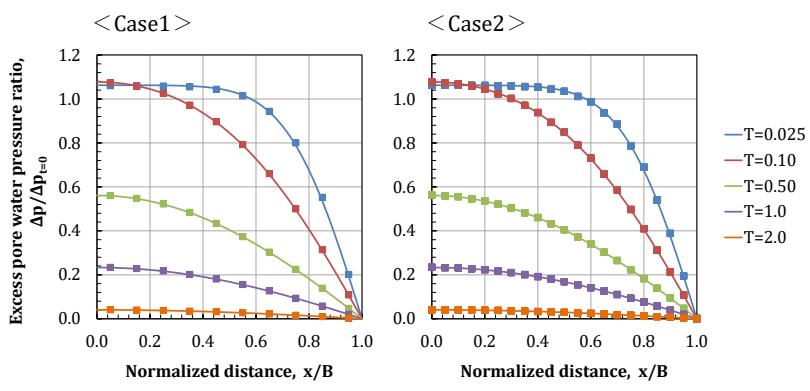


図-7 提案手法による過剰間隙水圧分布 (■: 数値解, 実線: 理論解)
Fig.7 Distributions of excess pore water pressure with proposed method (square mark: numerical solution, solid line: theoretical solution)

ちらのメッシュ分割においても、数値解は理論解を精度良く再現している。

したがって、FVM による連続式の離散化形式において、提案手法では間隙水の圧力勾配ベクトルと流出量がより適切に表現されていると言える。

5. まとめ

本研究では、飽和地盤に対する挙動評価のための、 $u\text{-}p$ 定式化による水-土連成 FEM 解析に着目し、FVM で離散化された従来の連続式における精度上の課題を示すとともに、その解決策を提案した。

解決策のポイントは、圧力勾配ベクトルの空間分解能の向上とメッシュ依存性の低減を図るため、FEM で離散化した間隙水のつり合い式に基づき、圧力勾配ベクトルを節点で規定していることにある。これにより、提案した解析手法では、節点での圧力勾配ベクトルを用いて要素から流出する間隙水の流量を表現し、FVM による連続式の離散化形式に適用している。

本解析手法の妥当性については、等方・等質な飽和弾性地盤モデルを用いて準静的な 2 次元圧密のベンチマークである Mandel 問題を対象に検証した。その結果、本手法は、これによる数値解が理論解とよく一致し、高い実用性を有することが確認された。

今後は、提案手法を液状化などの動的解析手法や不飽和地盤の浸透-変形連成解析手法に導入し、適用性を検討する予定である。

参考文献

- 1) Biot, M.A. : General theory of three-dimensional consolidation, Journal of Applied Physics, Vol.12, No.4, pp.155-164, 1941.
- 2) Biot, M.A. : Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, Journal of Applied Physics, Vol.26, No.2, pp.182-185, 1955.
- 3) Biot, M.A. : Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, Journal of the Acoustical Society of America, Vol.28, No.2, pp.168-191, 1956.
- 4) Biot, M.A. : Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, Journal of Applied Physics, Vol.33, No.4, pp.1482-1498, 1962.

- 5) (社)地盤工学会：地盤工学・基礎理論シリーズ2 地盤の動的解析－基礎理論から応用まで－, pp.88-95, 2007.
- 6) (一社)日本機械学会：計算力学ハンドブック－II. 差分法・有限体積法 熱流体編－, pp.25-26, 2006.
- 7) 赤井浩一・田村武：弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文集, 第269号, pp.95-104, 1978.
- 8) Iizuka, A. and Ohta, H. : A determination procedure of input parameters in elasto-viscoplastic finite element analysis, *Soils and Foundations*, Vol.27, No.3, pp.71-87, 1987.
- 9) Asaoka, A., Noda, T. and Fernando, G.S.K. : Effects of changes in geometry on the linear elastic consolidation deformation, *Soils and Foundations*, Vol.37, No.1, pp.29-39, 1997.
- 10) Oka, F. and Kimoto, S. : Computational modeling of multi-phase geomaterials, CRC press, Taylor & Francis group, pp. 202-205, 2012.
- 11) 竹山智英・飯塚敦・太田秀樹：一次関数近似を用いた水頭の空間離散化, 第41回地盤工学研究発表会, 161, pp. 321-322, 2006.
- 12) (一社)LIQCA 液状化地盤研究所 : LIQCA2D24・LIQCA3 D24, 2024年度公開版資料, 第II編 実践編, p.II-33, 2024.
- 13) Cryer, C.W. : A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.16, pp.401-412, 1963.
- 14) Abousleiman, Y., Cheng, A.H.D., Cui, L., Detournay, E. and Roegiers, J.C. : Mandel's problem revisited, *Geotechnique*, Vol. 46, No.2, pp.187-195, 1996.