

# レプリカ交換モンテカルロ法を用いた 設計用地震動評価のための地下構造推定技術の開発

連 惇<sup>\*1</sup>・内山 泰生<sup>\*2</sup>・山本 優<sup>\*1</sup>・長尾 大道<sup>\*3</sup>・伊藤 伸一<sup>\*3</sup>

Keywords : Replica exchange Monte Carlo method, MCMC, S-wave velocity structure, inversion, amplification factor, statistical modeling  
レプリカ交換モンテカルロ法, MCMC 法, S 波速度構造, 逆解析, 地盤増幅率, 統計モデリング

## 1. はじめに

近い将来首都直下地震や南海トラフ地震などの大規模災害の発生が予想されている。このような大規模災害に対して建築物の耐震安全性を確保するためには、耐震検討に用いる設計用地震動を適切に評価する必要がある。設計用地震動は建設地点における地下構造に大きな影響を受けるため、これを適切に反映したモデルを設定することが重要となる。

地下構造モデルの設定には PS 検層等の原位置試験を含め、様々な方法が用いられている。このうち、地震観測データや微動観測データの逆解析から地盤の S 波速度を推定する方法は、原位置試験よりも深部の情報を推定できることから、多くの実務や調査研究で適用されている。この方法では遺伝的アルゴリズム (GA)<sup>1)</sup>などのヒューリスティック探索法を適用して、観測値と地盤モデルから計算される理論値の誤差が最小となる S 波速度や層厚などの物性値が推定される。GA は初期値への依存性が低い等の利点があるが、最も観測値に合う地下構造モデルがひとつだけ推定されるため、推定値の精度についての説明性が不十分である。

数理統計的手法の一つであるマルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC 法) は、対象とするパラメータの確率分布を効率的に推定できることから、既往研究<sup>2), 3)</sup>において地下構造モデル推定への適用性が検討されている。しかし推定対象となる地下構造によっては、MCMC 法でも推定効率が著しく低下する場合がありますと考えられる。そこで本研究では複数の MCMC 法による

計算を並列化することによって広範囲をより効率的にサンプリングすることが可能なレプリカ交換モンテカルロ法 (REMC 法)<sup>4), 5)</sup>を用いた地下構造モデルの逆解析について数値実験を行う。数値実験から推定された確率分布の解釈、推定パラメータの統計処理方法の検討を行うことで、地下構造の統計モデリングについて検討する。

## 2. 手法概要

### 2.1 MCMC 法

MCMC 法は推定したいパラメータに任意の初期値を設定し、マルコフ連鎖<sup>6) 注 1)</sup>となっている条件下で指定されたステップ数にわたりランダムにサンプリングすることにより、その確率分布を推定する手法である。本研究では山中ら<sup>2)</sup>の手法を基に MCMC 法のアルゴリズムにメトロポリス法を使用した。以下に手法の概要を示す。

$k$  ステップ目の計算においてモデルパラメータのサンプル  $\mathbf{m}_k$  が得られている際に、これから計算される理論値と観測値との誤差  $E(\mathbf{m}_k)$  を式(1)、サンプルの確からしさを示す尤度  $L(\mathbf{m}_k)$  を式(2)により計算する。ここで  $C^0(f_i)$ ,  $C^c(f_i)$ ,  $\sigma^0(f_i)$  はそれぞれ周波数  $f_i$  での地盤増幅率の観測値, 計算値, および観測値の標準偏差であり,  $n_f$  は観測値のサンプリング数である。なお, 式(1)において地盤増幅率は対数正規分布に従うと仮定し, 誤差の計算には観測値と理論値の対数差を用いた。

\* 1 技術センター 都市基盤技術研究部 防災研究室

\* 2 技術センター 都市基盤技術研究部

\* 3 東京大学地震研究所

$$E(m_k) = \sum_i \left[ \frac{\log(C^0(f_i)) - \log(C^c(f_i))}{\sigma^0(f_i)} \right]^2 \quad (1)$$

$$L(m_k) = \exp \left[ -\frac{E(m_k)}{n_f} \right] \quad (2)$$

次にサンプル $m_k$ に対し提案分布 $p(m'|m_k)$ により候補サンプル $m'$ を生成する。ここで提案分布には平均値を $m_k$ とする正規分布を用い、標準偏差については事前に与えるものとした。生成された $m'$ を $k+1$ ステップ目のサンプルとして採用する受理確率 $r$ を式(3)により計算する。ここで $r$ は $0 < r \leq 1$ であるため、 $[0,1]$ の一樣乱数 $u$ を発生させ、式(4)により $k+1$ ステップ目のサンプル $m_{k+1}$ を決定する。この操作により現在のサンプルよりも尤度が高い場合には必ず更新、尤度が低い場合であっても尤度に応じた確率で更新されるため、尤度の高いサンプルが多く得られることとなる。

$$r = \min \left( \frac{L(m')p(m_k|m')}{L(m_k)p(m'|m_k)}, 1 \right) \quad (3)$$

$$m_{k+1} = \begin{cases} m', & u \leq r \\ m_k, & u > r \end{cases} \quad (4)$$

上記の計算を繰り返し行うことで、その確率分布が推定可能となる。

## 2.2 REMC 法

推定する地下構造によっては尤度関数が多峰性を持つ場合があり、その例を図-1 に示す。図-1(a)に示すような、尤度の高い領域が近接している場合には MCMC

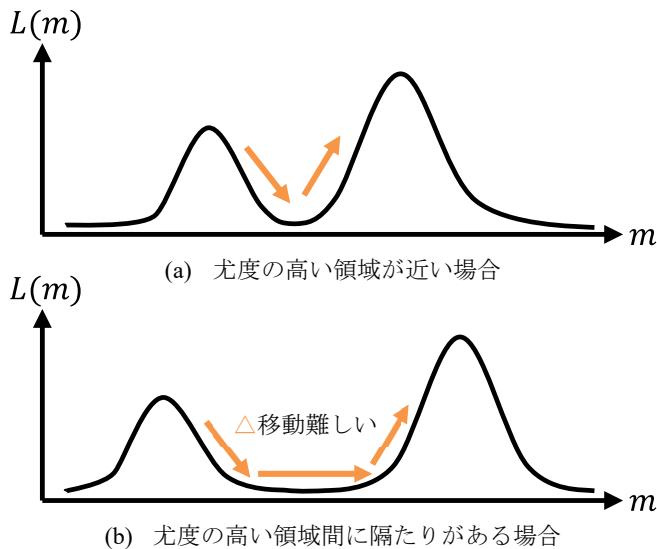


図-1 尤度関数形状例

Fig.1 Examples of likelihood function shape

法により効率よく推定可能である。一方、図-1(b)に示すような尤度の高い領域間に隔たりがあると、MCMC 法では領域間の移動が難しいため、計算効率が著しく低下する場合がある。そのため、パラメータの確率分布を正しく推定するための計算量が膨大となる場合がある。これに対し、REMC 法では複数の MCMC 法による計算を並列で行うことで広範囲を効率よくサンプリングすることが可能である。以下に手法の概要を示す。

REMC 法では、レプリカと呼ばれる複数の MCMC 法による計算を同時に行い、それぞれで式(1)により求めた誤差 $E(m_k)$ に対し尤度を式(5)により計算する。ここで $T_l$ は各レプリカに対して割り当てられる温度である。温度が高いレプリカでは尤度が高いサンプルから低いサンプルへ移る際に、式(3)で計算される受理確率が大きくなり低い尤度へも移りやすくなるため、広範囲を探索しやすくなる。一方温度の低いレプリカでは尤度の低いサンプルへ移りにくいため、尤度の高いサンプル周辺を詳細に探索することができる。

$$L(m_k|T_l) = \exp \left[ -\frac{E(m_k)}{T_l n_f} \right] \quad (5)$$

各レプリカに温度 $T_l$ 、および初期値を設定し MCMC 法同様の手順で計算を行い、計算過程において一定のステップごとにレプリカをランダムに選出し、式(6)の受理確率 $w$ によりレプリカ間でサンプルを交換する。低温のレプリカと高温のレプリカ間でサンプルを交換することにより、大域的にも局所的にも優れたサンプリングが可能となる。

$$w = \min \left( \frac{L(m_{k+1}|T_l)L(m_k|T_{l+1})}{L(m_k|T_l)L(m_{k+1}|T_{l+1})}, 1 \right) \quad (6)$$

上記の計算を繰り返し、 $T = 1$ のレプリカにより得られるサンプリングからパラメータの確率分布を推定する。

## 3. 解析概要

数値実験に用いたモデルについて各層の地表から数えた層番号、層厚、S 波速度 ( $V_s$ )、減衰 (Q 値)、密度 ( $\rho$ ) を表-1 に示す。層数、層厚の合計値は既知とした。鉛直アレイ地震観測が行われている状況を想定し、表-1 のモデルから作成した第 1 層上面と第 3 層上

面間の理論増幅率をターゲットとして第 1, 2 層の層厚および S 波速度を推定した。減衰および密度は表-1 の値で固定した。ステップ数は 100 万回とし、ステップ数の小さい間は設定した初期値の影響を受けるため、ここでは最初の 1 万ステップを除いたサンプルを用いて検討を行った。レプリカ間の交換判定の頻度は 10 ステップ毎とした。レプリカの個数は 4 個とし、各温度はそれぞれ  $T = 1, 4, 16, 64$  とした。

表-1 S 波速度構造モデルパラメータ  
Table 1 S-wave velocity model parameters

No.	層厚[m]	Vs[m/s]	$Q_{0s}$	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]
1	25	500	33.3	1.8
2	25	700	46.7	1.8
3	—	1000	66.7	2.0

#### 4. 解析結果

##### 4.1 MCMC 法による解析結果

MCMC 法による全サンプルから、式(2)で示す尤度が高い順に抽出した 50 サンプルの平均値に基づく地盤増幅率と S 波速度構造を図-2 の赤線に示す。図-2 の黒線

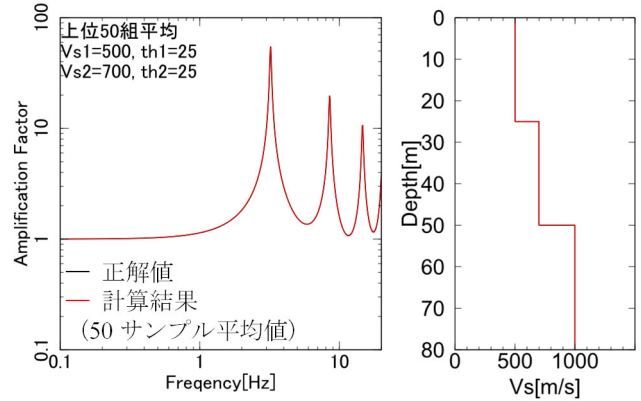


図-2 MCMC による推定モデル (上位 50 組平均値)  
-正解値比較

Fig.2 Estimated model by MCMC (average of top 50 samples values)-comparison of correct values

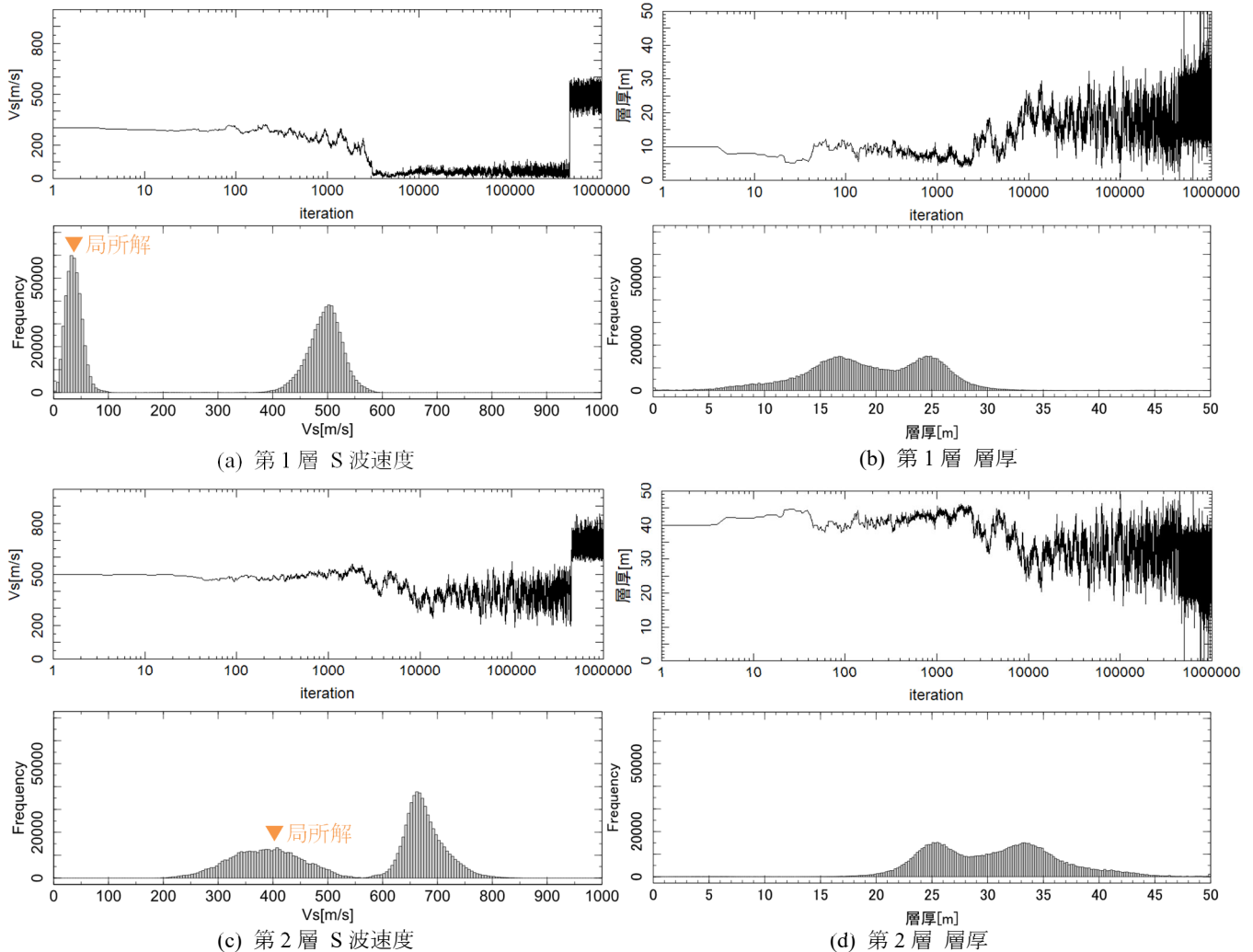


図-3 MCMC 法によるサンプリング結果

Fig.3 Sampling results by MCMC method

は正解値を示す。地盤増幅率，S 波速度構造の推定結果はどちらも正解値と一致している。図-3 に各層の S 波速度，層厚のサンプリング推移図および頻度分布を示す。S 波速度の推移図から，50 万ステップ程度までは正解値と異なる値周辺でのみサンプリングしており，局所解に陥っている様子が確認できる。このため頻度分布は多峰性を有し，S 波速度は正解値から離れた個所に多くサンプルが得られ，層厚は広範囲でサンプルが得られる形状となった。この結果によれば，MCMC 法では正解値と異なる値であっても，周囲よりも尤度が高くなる値で局所解に陥ることで正解値周辺のピークへ効率的に移動できない場合があることが分かる。これによりパラメータの確率分布が正しく求まらない可能性があることが示された。

#### 4.2 REMC 法による解析結果との比較

REMC 法の  $T = 1$  のレプリカにより得られる全サンプルから，式(5)で示す尤度が高い順に抽出した 50 サンプルの平均値と正解値の地盤増幅率および S 波速度構造

を図-4 に示す。地盤増幅率，S 波速度構造の推定結果はどちらも正解値と一致している。図-5 に各層の S 波速度，層厚のサンプリング推移図および頻度分布を示す。S 波速度については第 1 層，第 2 層ともに数千ステップ

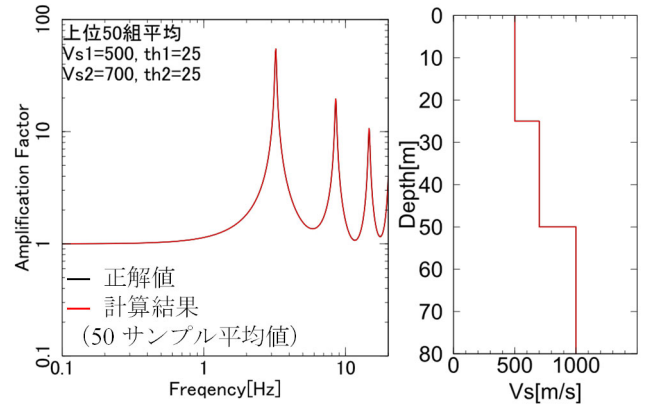


図-4 REMC による推定モデル（上位 50 組平均値）  
-正解値比較

Fig.4 Estimated model by REMC (average of top 50 samples values)-comparison of correct values

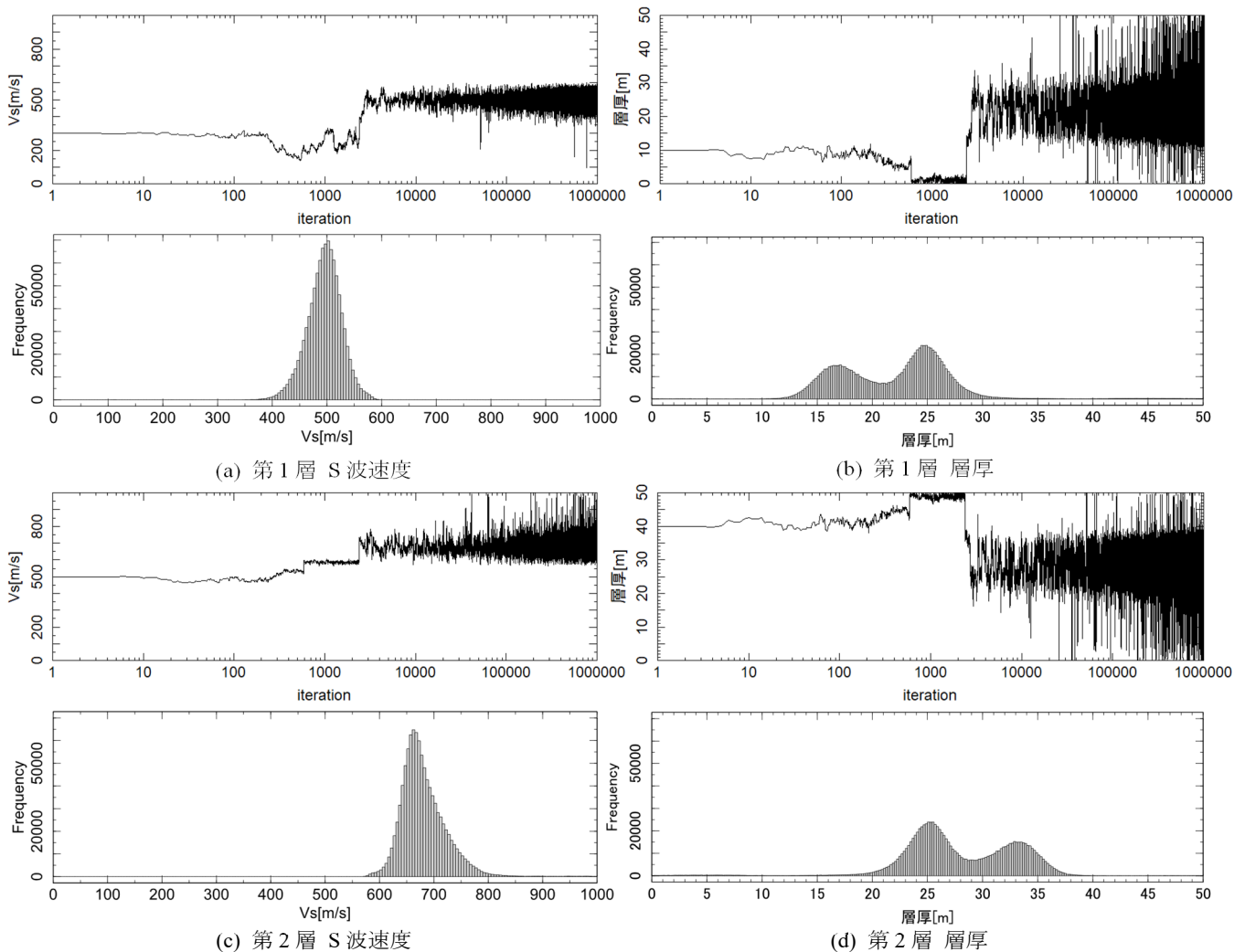


図-5 REMC 法によるサンプリング結果

Fig.5 Sampling results by REMC method

程度で初期値から正解値周辺へ推移し、それ以降は正解値周辺をサンプリングしている様子が確認でき、頻度分布の形状は正解値周辺での正規分布のような形状となった。一方、層厚については数千ステップ程度で正解値周辺へと推移するが、その後も広範囲にわたってサンプリングを続けている様子が確認でき、頻度分布は多峰性を持つ形状となった。これは層厚の地盤増幅率に対する感度が S 波速度と比較して低いためであると考えられる。頻度分布の形状は多峰性を持つものの、正解値周辺で頻度は最大となった。この結果から MCMC 法では局所解に陥る場合であっても REMC 法では地下構造モデルを効率よく推定可能であることが示された。

## 5. 考察

### 5.1 局所解についての検討

本節では MCMC 法でのサンプリングの際に陥った局所解についての考察を行う。図-6、図-7 に MCMC 法および REMC 法によるサンプリングの scatter plot を示す。それぞれの横軸、縦軸は各サンプルの S 波速度および

層厚である。サンプルの尤度によって色分けをしており、正解値の位置を黒線で示している。REMC 法では正解値の周辺で広範囲に探索できているが、MCMC 法では第 1 層、第 2 層共に S 波速度が正解値よりも小さい範囲でサンプリングが多く行われ、図-3 に示す局所解に陥っていることがわかる。図-3 から 50 万ステップ程度で局所解を抜け出したことが確認できたが、これは図-6 に○印で示す局所解周辺から矢印で示す方向へ探索範囲を変更することで、局所解を抜け出し正解値周辺へ移動したと考えられる。局所解のサンプル群から尤度が高い順に抽出した 50 サンプルの平均値と正解値の地盤増幅率および S 波速度構造を図-8 に示す。S 波速度構造および地盤増幅率は正解値と一致していない。しかし地盤増幅率については、3Hz 以上の帯域で局所解の平均値と正解値のピーク位置が一致している箇所がある。これにより周囲の解と比較しわずかに尤度が高くなり、そこから正解値周辺へ抜け出すことが難しく局所解に陥ったと考えられる。

### 5.2 多峰性についての検討

本節では REMC 法、および MCMC 法での層厚の推定結果に見られた分布の多峰性についての考察を行う。

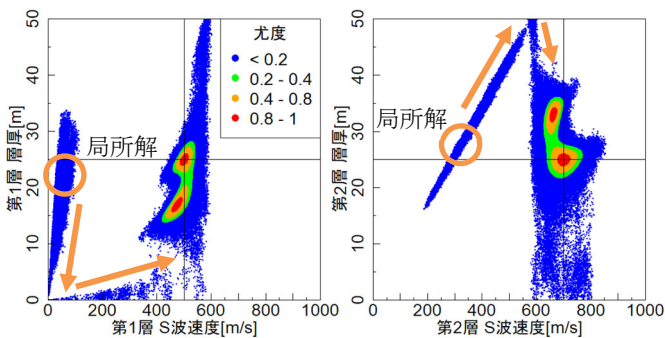


図-6 MCMC 法によるサンプリングの scatter plot

Fig.6 Scatter plots of samples by MCMC method

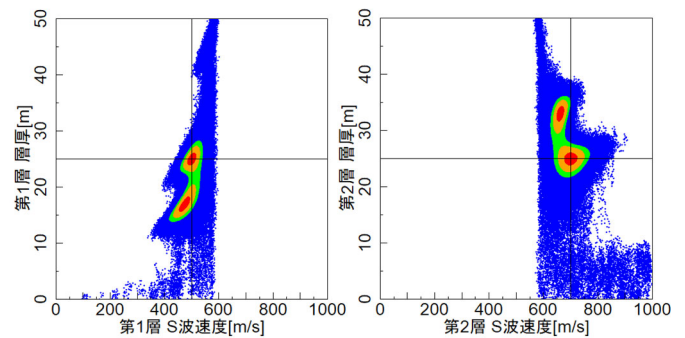


図-7 REMC 法によるサンプルの scatter plot

Fig.7 Scatter plots of samples by REMC method

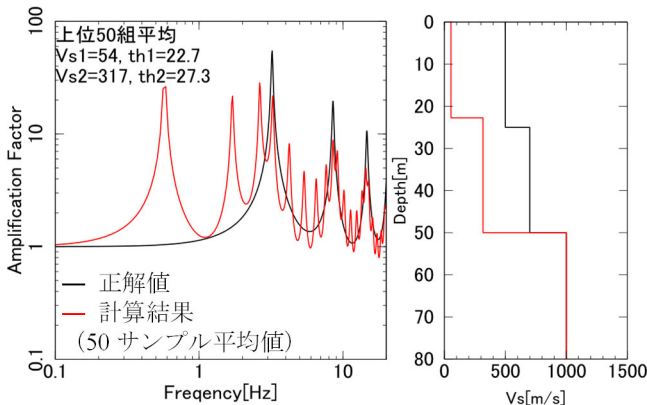


図-8 局所解による推定モデル（上位 50 組平均値）  
-正解値比較

Fig.8 Estimated model with local solution (average of top 50 samples values)-comparison of correct values

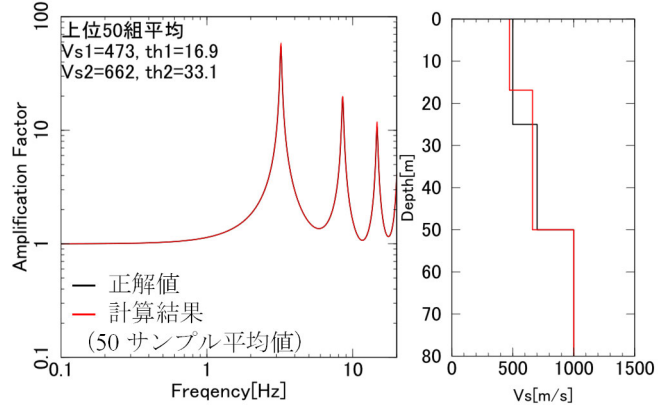


図-9 別解による推定モデル（上位 50 組平均値）  
-正解値比較

Fig.9 Estimated model with another solution (average of top 50 samples values)-comparison of correct values



図-7のREMC法によるサンプリングのscatter plotでは、正解値のほかに尤度が高くなる箇所がみられ、図-5で多峰性がみられた層厚の範囲と一致している。この範囲で得られたサンプル群から尤度が高い順に抽出した50サンプルの平均値と正解値の地盤増幅率およびS波速度構造を図-9に示す。S波速度構造は正解値と一致していないにもかかわらず、地盤増幅率は精度よく一致している。このように尤度が同程度に高い解が複数得られる場合にはREMC法であっても解を一つに決定することは難しいが、求まった確率分布からそれぞれの解の尤もらしさを算出することでより確からしい解を決定することは可能である。また本検討では地盤増幅率のみを用いて地下構造モデルの同定を行ったが、位相速度など他の観測データも用いたジョイントインバージョンを行うことで推定精度をさらに向上させることが可能であると考えられる。

## 6. まとめ

本研究では、地下構造モデルを推定する場合に、得られた解の確からしさが評価可能である手法の開発を目的とし、MCMC法の改良手法であるREMC法の地下構造推定への適用性を数値実験による地下構造モデルの逆解析により検討した。その結果、MCMC法では局所解に陥るような場合であってもREMC法では精度よくパラメータの確率分布を推定することが可能であることが示された。また尤度が同程度に高い解が複数箇

所で得られる場合にはREMC法であっても解を一つに決定することは難しい場合があるが、推定されたパラメータの確率分布からそれぞれの解の尤もらしさを算出することで解を決定する、他の観測データも用いたジョイントインバージョンにより推定精度をさらに向上させるといった対応をとる必要があると考えられ、これらについては今後の課題である。また実際の観測データによる地下構造の推定精度の検証も今後進めていく予定である。

## 注

注1) 現在の状態から次の状態に移る確率が現在の状態にのみ依存する確率過程

## 参考文献

- 1) 山中浩明, 石田寛: 遺伝的アルゴリズムによる位相速度の逆解析, 日本建築学会論文集 第468号, 9-17, 1995.
- 2) 山中浩明: マルコフ連鎖モンテカルロ法による表面波の位相速度の逆解析, 物理探査 第66巻第2号, 97-110, 2013.
- 3) 山中浩明: MCMC法による位相速度の逆解析における地盤モデルの推定制度の評価, 日本建築学会構造系論文集 第79巻 第706号, 1795-1803, 2014.
- 4) Kano, M., Nagao, H., Ishikawa, D., Ito, S., Sakai, S., Nakagawa, S., Hori, M. & Hirata, N.: Seismic wavefield imaging based on the replica exchange Monte Carlo method, Geophysical Journal International, 208, 529-545, 2017.
- 5) 伊庭幸人ほか: 計算統計Ⅱ マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺 (統計科学のフロンティア 12), 岩波書店, 358p., 2005.
- 6) 長尾智晴: 最適化アルゴリズム, 昭晃堂, 209p., 2000.