

汎用三次元 FEM に二相系支配方程式を導入した液状化解析手法

その1 支配方程式の定式化と液状化地盤の弾塑性構成モデル

宇野 浩樹*¹・船原 英樹*²・柴田 景太*²・岩井 創*²・鈴木 知晃*³・石田 貴之*³

Keywords : liquefaction, three dimensions, effective stress analysis, u-w formulation, elasto-plastic constitutive law, Stress-Density model
 液状化, 三次元, 有効応力解析, u-w 定式化, 弾塑性構成則, Stress-Density モデル

1. はじめに

1.1 背景および目的

令和5年度版防災白書によると、南海トラフ地震や首都直下地震等の大規模地震の発生が切迫している¹⁾。大規模地震時に予想される液状化被害に対し、効果的な対策工や合理的な基礎形式を検討するには、液状化地盤の変形を詳細に評価することが重要となる。

液状化に伴う一連の地盤変形は、図-1 に示す「地震時の地盤の剛性低下による流動変形」と「地震時および地震後の間隙水の浸透による体積変化」に起因して生じるが、これらのメカニズムは、飽和土が土骨格と間隙水の二相の連続体で構成されると仮定した Biot の飽和多孔質体理論^{2), 3), 4), 5)}によって精緻に捉えられる。このことから、筆者らは要素ライブラリーや非線形特性等の実装が豊富な汎用構造解析プログラム TDAPIII に本理論に基づく二相系有効応力解析機能を導入した。本研究の内容は二編の論文によって報告する⁶⁾。本報文では、解析機能の骨子となる支配方程式の定式化と液状化地盤の弾塑性構成モデルについて述べ、土柱モデルによる基本的なシミュレーション例を示す。

1.2 Biot の飽和多孔質体理論

Biot の飽和多孔質体理論^{2), 3), 4), 5)}は、図-2 のように、飽和土を固相（土骨格）と液相（間隙水）からなる二相系の多孔質体でモデル化し、各相を表す連続体の重ね合わせによって飽和土の力学モデルを規定するというものである。

具体的には、二相間の相互作用を考慮して相ごとに諸量と保存式を導出し、それらを足し合わせることで飽和土の支配方程式を構築する。

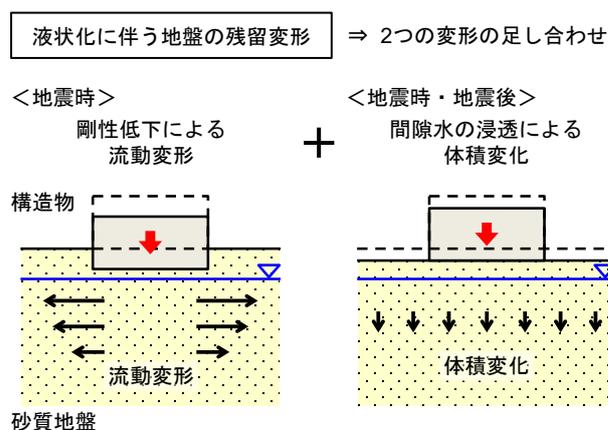


図-1 液状化に伴う地盤変形のメカニズム
 Fig.1 Mechanisms of ground deformation due to liquefaction

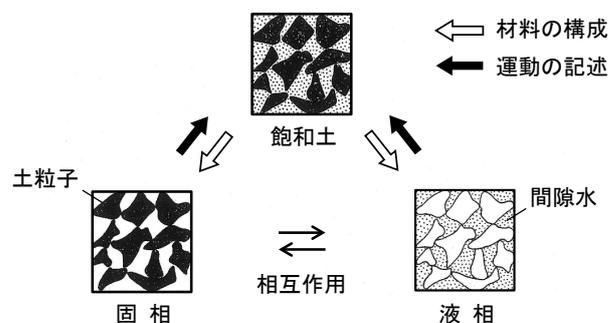


図-2 飽和多孔質体理論の概念
 Fig.2 Concept of saturated porous media theory

2. 二相系支配方程式の概要

2.1 既往の研究成果

TDAPIII に導入した u-w 定式化（固相の変位 u と液相の平均相対変位 w が未知数の定式化）による支配方程式を示す前に、不飽和を含む多相系多孔質体に関する

*1 技術センター 社会基盤技術研究部 地盤研究室
 *2 技術センター 都市基盤技術研究部 防災研究室
 *3 (株) アーク情報システム

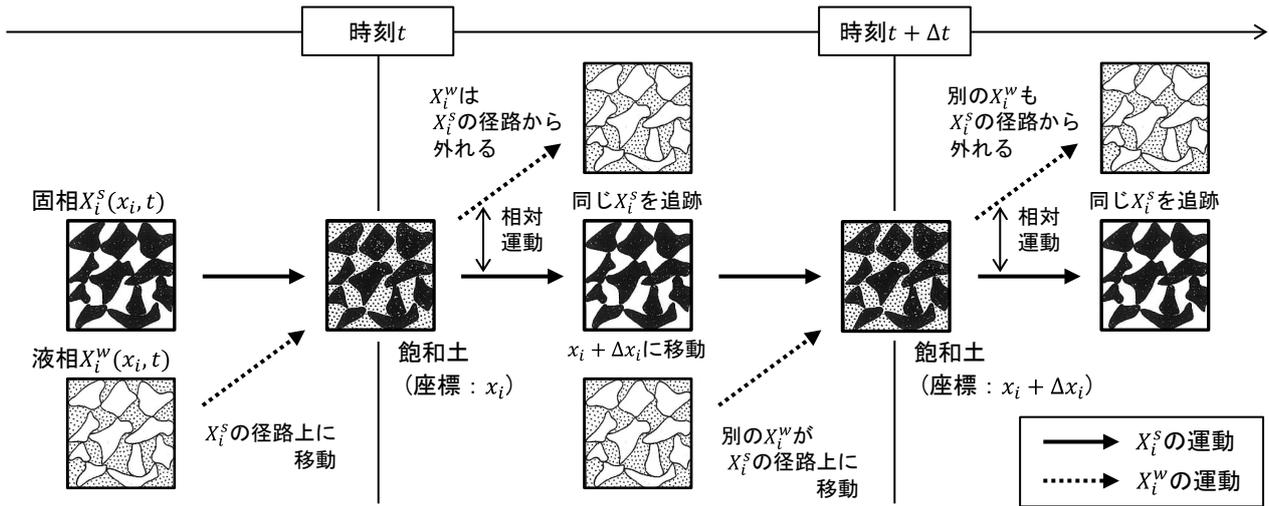


図-3 二相系の運動における物質表示の適用

Fig.3 Application of material description in motions of two-phase system

既往の研究成果(例えば, 7), 8), 9)を参照し, 本節ではそれらに基づく二相系支配方程式について示す。

すなわち, 温度変化とともに二相間の質量交換を無視し, 土粒子を非圧縮とすると, 飽和土を対象とした二相系支配方程式が式(1)~式(6)のように導かれる。なお, 以下の支配方程式において, 「 \cdot 」は固相で観測される物質時間微分を表す。

<飽和土のつり合い式>

$$(\rho - n\rho^w)\dot{v}_i^s + n\rho^w(\dot{v}_i^w + \theta_i^w) = \sigma_{ij,j} + \rho b_i \quad (1)$$

<間隙水のつり合い式>

$$\rho^w(\dot{v}_i^w + \theta_i^w) + \rho^w g k_{ij}^{-1} n(v_j^w - v_j^s) = -p_{,i}^w + \rho^w b_i \quad (2)$$

<連続式>

$$v_{i,i}^s + \{n(v_i^w - v_i^s)\}_{,i} + \frac{n}{K^w} \dot{p}^w + \varphi^w = 0 \quad (3)$$

<有効応力>

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p^w \delta_{ij} \quad (4)$$

<液相の加速度における相対移流項>

$$\theta_i^w = v_{i,j}^w (v_j^w - v_j^s) \quad (5)$$

<液相の体積変化率における相対移流項>

$$\varphi^w = \frac{n}{K^w} p_{,i}^w (v_i^w - v_i^s) \quad (6)$$

ここに, v_i^s, v_i^w : 固相と液相の速度ベクトル, θ_i^w : 液相の加速度ベクトルにおける相対移流項, ρ, ρ^w : 飽和土と間隙水の密度, n, k_{ij}, K^w : 間隙率, 透水係数テンソル, 間隙水の体積弾性係数, $\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}$: 全応力テンソル, 有効応力テンソル(引張: 正), p^w : 間隙水圧(圧縮: 正), g, b_i : 重力加速度, 物体力ベクトル, φ^w : 液相の体積変化率における相対移流項, δ_{ij} : クロネッカーのデルタ, である。

2.2 二相系の運動の記述方法

前述の支配方程式は固体力学で慣用の Lagrange 表示で表している。ここに, Lagrange 表示とは, 物質点の運動を記述することにより, 連続体全体の運動を把握する方法である。以下では, 式(1)~式(6)の支配方程式の導出に際し, 固相と液相の運動の捉え方と記述の仕方が異なることについて示す。

まず, 固相は一般的な固体力学にならない, 物質点を固定してその運動を Lagrange 的に逐次追跡する。これは飽和土の変形が固相の材料特性や配置に大きく依存するためである。

次に, 液相については図-3 を用いて解説する。図-3 では, 時刻 t における固相の物質点のうち, 座標 x_i に存在する物質点 $X_i^s(x_i, t)$ の運動を Lagrange 的に逐次追跡している。一方, 時刻 t に $X_i^s(x_i, t)$ を通過する液相の物質点 $X_i^w(x_i, t)$ は, 当該時刻の瞬間に $X_i^s(x_i, t)$ と同一座標に位置し, 二相間の相対運動 (= 透水) によって微小時間 Δt の間に $X_i^s(x_i, t)$ の径路から外れる。したがって, 時刻 t における飽和土の物質点レベルでの力学モデルは, $X_i^s(x_i, t)$ とそれを通過する瞬間の $X_i^w(x_i, t)$ の運動を記述し, それらを重ね合わせることによって規定する。さらに, $X_i^s(x_i, t)$ が座標 $x_i + \Delta x_i$ に移動する時刻 $t + \Delta t$ においては, 当該時刻の $X_i^s(x_i, t)$ の運動とともに, 液相の別の物質点 $X_i^w(x_i + \Delta x_i, t + \Delta t)$ が $X_i^s(x_i, t)$ を通過する瞬間の運動を記述し, 飽和土のモデル化に適用する。

すなわち, 液相については, Lagrange 的に逐次追跡する固相の物質点 $X_i^s(x_i, t)$ の運動を基準とし, 重ね合わせによる飽和土のモデル化の観点から, $X_i^s(x_i, t)$ の径路上に時々刻々存在する液相の物質点 X_i^w に着目して X_i^w が $X_i^s(x_i, t)$ を通過する瞬間の運動を記述する。

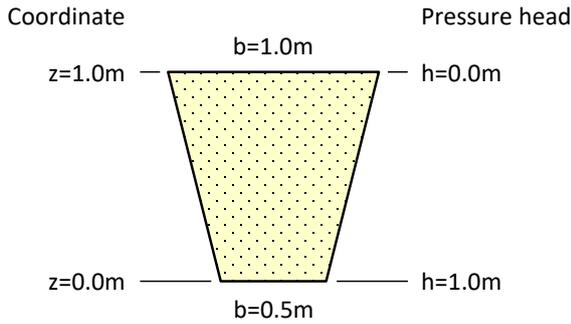


図-4 流れが徐々に拡大する地盤モデル
Fig.4 Ground model with gradually expanding flow

以上のように、固相の物質点の運動は Lagrange 的に捉えるのに対し、それを基準に液相の物質点の運動は Euler 的に捉える。このことから、固相の物質点が二相系の力学的な場の物質時間微分に対する基準点となり、固相における観測値が各諸量の物質時間微分の基準になる。したがって、「各諸量の液相で観測される物質時間微分」については、「基準になる固相での観測値」と「液相における観測値に補正するための二相間の相対速度に伴う移流項」(本研究では「相対移流項」と呼ぶ¹⁰⁾)を用いて表す¹¹⁾。例えば、液相の加速度ベクトル a_i^w は、 v_i^w の液相で観測される物質時間微分であり、固相での観測値 \dot{v}_i^w と二相間の相対移流項 θ_i^w によって次式のように表現する。前述の式(1)の左辺第2項と式(2)の左辺第1項を参照されたい。

$$a_i^w = \dot{v}_i^w + v_{i,j}^w(v_j^w - v_j^s) = \dot{v}_i^w + \theta_i^w \quad (7)$$

2.3 相対移流項の影響

後述のように、TDAPIII に導入した u-w 定式化による支配方程式では、式(5)、式(6)の各相対移流項が十分小さいと仮定としている。本節では、Noda and Toyoda (2019)¹²⁾を参照し、図-4の地盤モデルを用いて液相相対速度の相対移流項の影響を検討する。

地盤モデルは、左右対称とし、底面から地表面に向かって幅を漸増させる。高さは1.0mとし、底面と地表面の圧力水頭をそれぞれ1.0m、0.0mで固定する。

モデルの左端と右端では間隙水が境界面に沿って斜め上向きに流れるため、図-4は二次元浸透問題となるが、本研究では、巨視的な浸透場を仮定し、同一深度内の流速分布を考慮しない平均的な鉛直方向(=z方向、上向き：正)の透水のみを考える¹²⁾。これによって、間隙率 n を均質とし、固相と液相をともに非圧縮とすると ($v_z^s = 0$, $K^w = \infty$)、定常状態における間隙水のつり合い式と連続式が次のようになる。

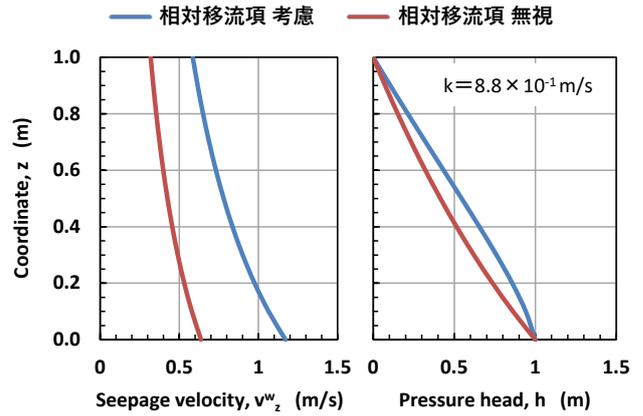


図-5 定常状態における実流速と圧力水頭の深度分布
Fig.5 Depth distribution of seepage velocity and pressure head at steady state

$$\rho^w \frac{dv_z^w}{dz} v_z^w + \frac{\rho^w g}{k} n v_z^w = -\rho^w g \frac{dh}{dz} \quad (8)$$

$$\frac{dq}{dz} = n \frac{dv_z^w}{dz} b + n v_z^w \frac{db}{dz} = 0 \quad (9)$$

ここに、 h : 圧力水頭、 b : 座標 z における幅 ($=az + c$)、 a, c : モデル形状を表す定数、 q : 座標 z における流量 ($=n v_z^w b$)、である。

式(8)、式(9)より、定常状態における実流速 v_z^w と圧力水頭 h の解析解が以下のように求められる。

$$v_z^w = \frac{C_1}{az + c} \quad (10)$$

$$h = -\frac{1}{2g} \left(\frac{C_1}{az + c} \right)^2 - \frac{n C_1}{ak} \ln \frac{az + c}{aH + c} + C_2 \quad (11)$$

ここに、 H はモデルの高さである。 C_1, C_2 は積分定数であり、それぞれの次元は $L^2 T^{-1}$ 、 L である (L : 長さ、 T : 時間)。底面 ($z=0.0m$) の幅を $0.5m$ 、地表面 ($z=1.0m$) の幅を $1.0m$ とし、図-4の圧力水頭に関する境界条件を考慮すると、 C_1, C_2 は次式のようになる。

$$C_1 = \frac{2 \ln 2 n g - \sqrt{4(\ln 2)^2 n^2 g^2 - 6gk^2}}{3k} \quad (12)$$

$$C_2 = \frac{1}{2g} C_1^2 \quad (13)$$

$g=9.81 \text{ m/s}^2$, $n=0.50$, $k=8.8 \times 10^{-1} \text{ m/s}$ の場合に得られる v_z^w と h の深度分布を図-5に示す。相対移流項を無視したケースと比較すると、 v_z^w は相対移流項を考慮した詳細なケースの方が全体的に大きくなっており、また、 h はモデル下部で低下しにくくなっている。これらは、図-4の境界条件により、相対移流項に伴う有意な慣性力が透水に伴う抵抗と反対向きに作用して流れ

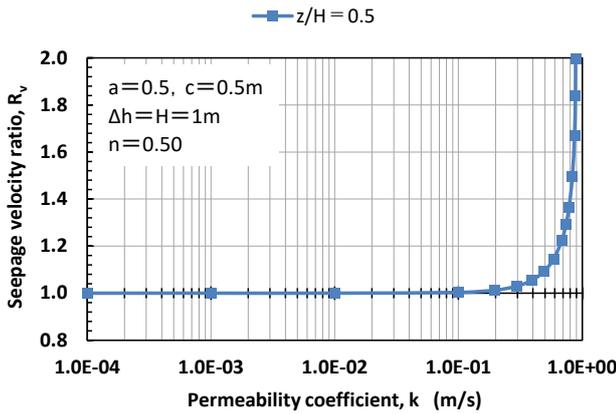


図-6 透水性による相対移流項の影響度の違い
Fig.6 Difference in effect of relative advection term with permeability

を促進するためである。

さらに、 $z=0.5\text{m}$ での v_z^w を指標とし、透水係数 k を変化させて相対移流項の影響度を調べた。その結果を図-6 に示す。縦軸は v_z^w の比率 R_v であり、相対移流項を考慮したケースの値を無視したケースの値で除して求めている。図のように、相対移流項の有無による v_z^w の違いは k が 10^{-1}m/s オーダーの範囲で顕著になっている。

すなわち、厳密には検討の余地があるものの、液相加速度の相対移流項の影響は、解析手法の実用上の目安として、透水係数が 10^{-2}m/s オーダー以下の場合に十分小さいと考えられる。

3. TDAPIII 二相系有効応力解析機能

3.1 二相系支配方程式

3.1.1 TDAPIII に導入した u-w 形式による支配方程式

TDAPIII に導入した u-w 定式化による二相系支配方程式を式(14)~式(18)に示す。以下の支配方程式では前述の式(5), 式(6)の各相対移流項が十分小さいとしている。また、ひずみは微小ひずみを仮定し、土粒子は非圧縮としている。

<飽和土のつり合い式>

$$\rho \ddot{u}_i + \rho^w \ddot{w}_i = \sigma_{ij,j} + \rho b_i \quad (14)$$

<間隙水のつり合い式>

$$\rho^w \ddot{u}_i + \frac{\rho^w}{n} \ddot{w}_i + \rho^w g k_{ij}^{-1} \dot{w}_j = -p_{,i}^w + \rho^w b_i \quad (15)$$

<連続式>

$$\dot{u}_{i,i} + \dot{w}_{i,i} + \frac{n}{k^w} \dot{p}^w = 0 \quad (16)$$

<有効応力>

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p^w \delta_{ij} \quad (17)$$

<液相の平均相対速度>

$$\dot{w}_i = n(\dot{U}_i - \dot{u}_i) \quad (18)$$

ここに、 u_i , U_i , w_i は固相の変位ベクトル、液相の変位ベクトルと平均相対変位ベクトルであり、その他の変数は 2.1 節で示した通りである。

u-w 定式化は、間隙水の圧縮性を仮定し、固相の変位 u と液相の平均相対変位 w を未知数とする定式化である。連続式(16)を用いて間隙水圧 p^w を未知数から消去し、飽和土のつり合い式(14)と間隙水のつり合い式(15)を解析する。

TDAPIII では各つり合い式の空間離散化に一次のアイソパラメトリック要素による有限要素法を適用し、 u と w に対して同じ形状関数を仮定している。また、 u と w によって求まる p^w は、現状、初期値が 0 の過剰間隙水圧としている。

3.1.2 他の定式化との違い

ここでは、慣用の他の定式化として、u-p 定式化と u-U 定式化を取り上げ、u-w 定式化との違いを述べる。

u-p 定式化^{例えば, 13)}は液相に関する未知数を間隙水圧 p^w とする定式化である。u-w 定式化に比べて自由度数が少なく、計算コストが低減される。しかしながら、u-p 定式化では、固相に対する液相の平均相対加速度 \ddot{w} が固相の加速度 \ddot{u} に比べて小さいとし、 $\ddot{w} = 0$ と仮定することによって液相の慣性項の一部が無視される。そのため、砂礫のような高透水性材料の場合や高振動数領域での適用に限界があるとされている¹⁴⁾。

一方、u-U 定式化^{例えば, 15)}では、液相の変位 U を未知数とし、液相の慣性項が u-w 定式化と同様に考慮される。しかしながら、地層や密度等の違いで間隙率の分布が不連続となる地盤に適用すると、解析精度に問題が生じる¹⁶⁾。これは間隙率の不連続面上で流量と間隙水圧の連続性が満たされないためである。一方、u-w 定式化では、それらの連続性が常に満足されるため、間隙率の分布による精度上の問題は発生しない。

以上より、u-w 定式化、u-U 定式化、u-p 定式化を比較すると、適用性が最も高いのは u-w 定式化と言える。なお、慣用の u-U 定式化における前述の精度上の問題に対しては、宇野・船原(2022)により、新たな空間離散化手法が提案されている¹⁷⁾。

3.1.3 圧密解析機能

TDAPIII では、地震時に発生した過剰間隙水圧が地震後に消散する過程を準静的に解析するため、圧密解析機能を実装している。本機能では慣性項を除いて各つり合い式を解析する。

表-1 検証解析における境界条件

Table 1 Boundary conditions in verification analyses

解析解 境界条件	Simon らによる 一次元過渡応答理論	Terzaghi による 一次元圧密理論
地表面	固相：正弦波荷重 液相： $p^w = 0$	固相：一定荷重 液相： $p^w = 0$
底面	二相系粘性境界	固相： $u_z = 0$ 液相： $w_z = 0$

3.2 境界条件

変位境界は u 、 w ともに単点拘束によって設定可能であり、また、各変位の拘束条件としては多点拘束等も設定できる。これらの拘束条件による機能を駆使することで、例えば、解析領域が側方に繰り返される周期境界や境界面の法線方向の流量を0とする非排水境界を設定する。

応力境界は全応力に対応した表面力の設定が可能であり、飽和土のつり合い式(14)に作用させる。また、前述のように、TDAPIIIで評価している間隙水圧は、現状、初期値が0の過剰間隙水圧であり、水圧境界としては過剰間隙水圧が0の条件のみ設定できる。

さらに、 u - w 定式化に対応した底面粘性境界と側方境界要素が設定可能である^{18) 19) 20)}。ここで言う、側方境界要素とは、解析領域の側方から無限遠方まで地盤が広がっていることを表現する仮定の要素である。具体的には、解析領域の側方に無限遠方の地盤を模擬した仮定の自由地盤を設定し、解析領域の側方における逸散波動をダッシュポットで吸収させるとともに、解析領域の境界面に切欠き力を作用させる機能である。これにより、解析領域を有限の範囲でモデル化する影響を低減させる。

3.3 ユーザー定義非線形モデル

ユーザーが独自に固相の構成則を定義して用いる機能である。本モデルにおいて、応力増分とひずみ増分の構成関係を規定する $[D]$ マトリックスは、非対称行列に対応できるよう、 6×6 のフルマトリックスで扱う。

3.4 検証解析

プログラムコードの妥当性は、機能ごとに適切に検証し、確認している。本節では、Simon et al.(1984)の一次元過渡応答理論²¹⁾とTerzaghiの一次元圧密理論^{例えば、22)}に基づく検証例を示す。

これらの理論では二相系弾性材料を対象としている。前者の理論では、半無限地盤の地表面に表面力を作用させた際の動的応答問題に対し、慣性項を含む支配方程式にラプラス変換を用いることで固相の変位 u と液相

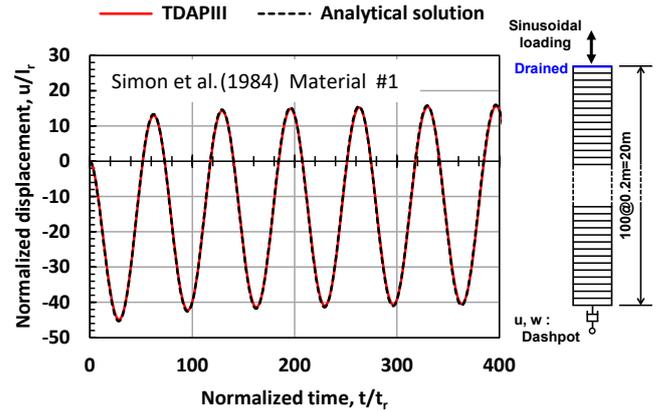


図-7 一次元動的過渡応答解析によるコード検証
Fig.7 Verification with 1D dynamic transient response analysis

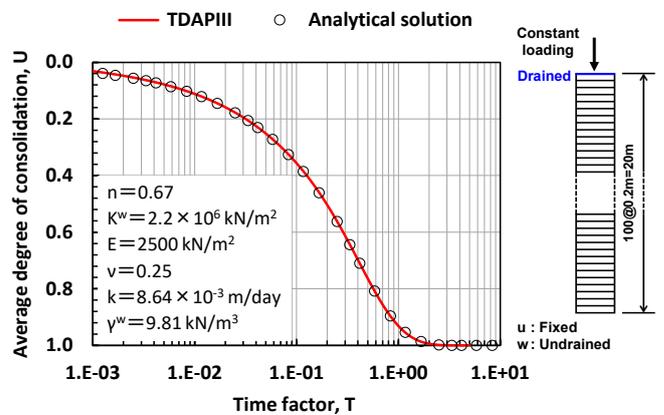


図-8 一次元圧密解析によるコード検証
Fig.8 Verification with 1D consolidation analysis

の平均相対変位 w に関する解析解を導いている。一方、後者においては、慣性項を除いた支配方程式と熱伝導方程式の類似性を応用し、準静的な圧密過程での過剰間隙水圧 Δp^w と平均圧密度 U に関する解析解を導出している。

検証方法は TDAPIII による数値解をそれぞれの理論による解析解と比較するというものである。

いずれの検証解析においても、土柱モデルは層厚 20 m、要素高さ 0.2m ピッチとした。表-1に境界条件を示す。ここに、Simon et al.(1984)による解析解は地表面を応力境界とする半無限弾性地盤に対して得られていることから、TDAPIII による解析ではモデル底面に粘性境界を設定した。

その他、物性値等の詳細は割愛するが、図-7 に一次元動的過渡応答解析で得られた地表面における固相の正規化変位 u/l_r の時間変化を、図-8 に一次元圧密解析による平均圧密度 U の時間変化をそれぞれ示す。ここに、 l_r は基準長さである。これらの図に示すように、TDAPIII による数値解は各解析解とよく一致している。

表-2 SDモデルにおける記述の違い
Table 2 Difference of descriptions in SD models

モデル	2次元SDモデル	3次元SDモデル
有効拘束圧 p'	$-\frac{\sigma'_{xx} + \sigma'_{zz}}{2}$	$-\frac{1}{3}\sigma'_{kk}$
偏差応力 s_{ij}	$\frac{\sigma'_{zz} - \sigma'_{xx}}{2}, \sigma'_{zx}$	$\sigma'_{ij} - \frac{\sigma'_{kk}}{3}\delta_{ij}$
体積ひずみ ε_v	$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}$	ε_{kk}
偏差ひずみ ε_{ij}	$\frac{\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}}{2}, \varepsilon_{zx}$	$\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}$
塑性偏差ひずみ増分 de^p	$\sqrt{(d\varepsilon_{zz}^p - d\varepsilon_{xx}^p)^2 + (d\varepsilon_{zx}^p)^2}$	$\sqrt{2de_{ij}^p de_{ij}^p}$

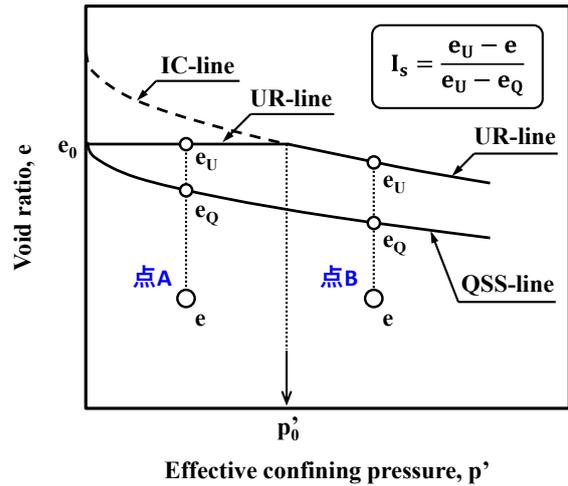


図-9 状態指数の定義

Fig.9 Definition of state index

4. 液状化地盤の構成モデルとその適用

4.1 本研究で実装した砂質土の構成則

4.1.1 Stress-Density モデルの概要

TDAPIII には砂質土の応力～ひずみ関係を表現するための構成則として三次元に拡張された Stress-Density モデル (以下、「SD モデル」と呼ぶ) を導入した。

SD モデルは、微小ひずみ理論に基づく弾塑性構成モデルであり、二次元モデルが開発された後²³⁾、三次元モデルに一般化された²⁴⁾。二次元 SD モデルは、三次元 SD モデルに平面ひずみ条件を課したモデルでなく、表-2 のように、単純二次元²⁵⁾による有効応力とひずみの空間で記述される。ここに、本報文では、有効応力とひずみは引張を正とし、有効拘束圧は圧縮を正とする。また、いずれのモデルも参照する座標系は鉛直方向をz軸とする三次元直交座標系とする。

4.1.2 定式化

(1) 状態指数

せん断による土骨格の圧縮性は間隙比 e と有効拘束圧 p' に依存することから、それを加味した砂質土の現在の締め具合を表す指標として、状態指数 I_s を式(19)のように定義する。ここに、 e_U は p' の現在値に対して最もゆるい状態を表す UR 線上の間隙比、 e_Q は擬似定常状態を表す QSS 線上の間隙比である。なお、UR 線と QSS 線の詳細については文献 26) を参照されたい。

図-9 のように、点 A と点 B の e が等しい場合、点 A の方が、せん断による土骨格の圧縮性が低く、良く締まった状態にある。 I_s は点 A の方が大きくなるため、後述の p' で正規化した塑性せん断係数 G_N と最大偏差応力比 η_{max} も点 A の方が大きくなる。

SD モデルでは、 I_s の導入により、同一種類の砂質土であれば、一つの p'_i と e_i の組み合わせに対するパラメータ

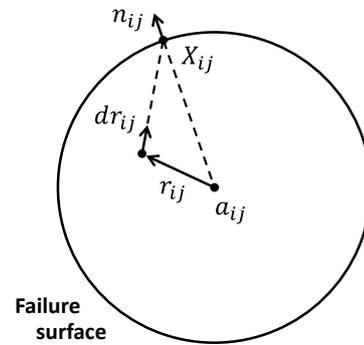


図-10 hypoplastic flow rule の概念

Fig.10 Concept of hypoplastic flow rule

セットで、他の組み合わせによる液状化挙動も再現される。ここに、 p'_i 、 e_i は地震前の p' と e の初期値である。

すなわち、 I_s によって同じ土層内の深度依存性が自動的に考慮されるため、本モデルには深度ごとのパラメータ設定を必要としないという実用上の利点がある。

(2) 負荷曲面

降伏条件は、現状、偏差応力比 r_{ij} ($= s_{ij}/p'$) に対してのみ考慮し、偏差応力比と塑性偏差ひずみの関係を偏差応力比空間上の負荷曲面によって規定する。

偏差応力比～塑性偏差ひずみ関係は式(20)の双曲線関数を規準とする。 η_L は現在偏差応力比 r_{ij} を通る負荷曲面の半径、 e^p は塑性偏差ひずみである。 G_N は p' で正規化した塑性せん断係数であり、 e^p の伸展に伴って小ひずみ時の正規化塑性せん断係数 $G_{N,max}$ から大ひずみ時の正規化塑性せん断係数 $G_{N,min}$ まで低下する。ここに、 η_{max} 、 $G_{N,max}$ 、 $G_{N,min}$ には I_s の一次式を適用する。

したがって、液状化とそれに至るまでのヒステリシス挙動は、塑性係数 (plastic modulus) が G_N で与えられるため、負荷曲面の拡大と縮小、乗移りに伴う η_L およ

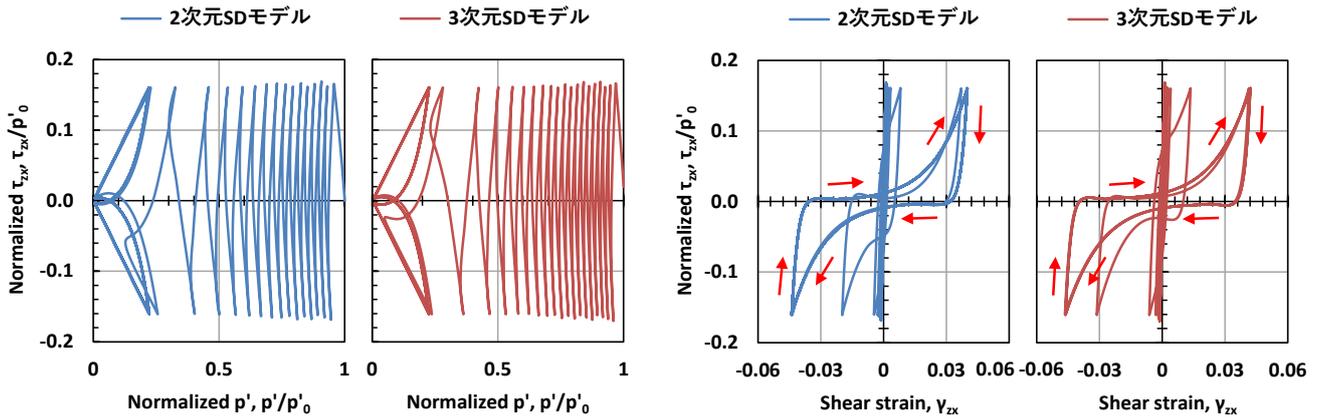


図-11 要素試験シミュレーション結果 (左：有効応力径路，右：せん断応力～せん断ひずみ関係)

Fig.11 Results of element test simulations (left: effective stress paths, right: relationships between shear stress and shear strain)

び e^p の変化によって制御されることになる。

(3) 流れ則

塑性乗数 (plastic multiplier) に相当する塑性偏差ひずみ増分の大きさ de^p は適応条件から求め、 de^p の方向 n_{ij} は hypoplastic flow rule²⁷⁾に従う。すなわち、図-10のように、偏差応力比の現在点 r_{ij} を偏差応力比増分 dr_{ij} の方向に破壊曲面まで投影し、破壊曲面上の共役点 X_{ij} を求める。 n_{ij} は X_{ij} における破壊曲面上の法線方向とする。

さらに、塑性体積ひずみ増分 de_v^p については、次項のストレス～ダイレイタンスー関係と de^p によって求める。

(4) ストレス～ダイレイタンスー関係

ストレス～ダイレイタンスー関係は、Cambridge 学派が提唱した塑性仕事によるアプローチに基づき、式(21)のように与える。このアプローチにおいて、外力によって加えられる非可逆的なエネルギーは、土骨格の内部摩擦により、消費されると仮定する。ここに、 c は塑性偏差ひずみ増分と現在偏差応力比の2つの方向に関する非共軸性を表すパラメータであり、 μ は前述の内部摩擦 $\sin \varphi_p$ (φ_p : 摩擦角)を表すダイレイタンスーパラメータである。

さらに、 μ については、式(22)により、実験データに基づく塑性偏差ひずみ依存性を考慮する。ここに、 μ_0 と M はそれぞれ小ひずみ時、大ひずみ時の μ であり、 S_c は $\mu = (\mu_0 + M)/2$ のときの塑性偏差ひずみ e^p である。

$$I_s = \frac{e_U - e}{e_U - e_Q} \quad (19)$$

$$\eta_L = \frac{\eta_{max} G_N e^p}{\eta_{max} + G_N e^p} \quad (20)$$

$$-\frac{d\varepsilon_v^p}{de^p} = \mu - c\eta, \quad c\eta = n_{ij} \frac{r_{ij}}{\sqrt{2}} \quad (21)$$

$$\mu = \mu_0 + \frac{2}{\pi} (M - \mu_0) \tan^{-1} \left(\frac{e^p}{S_c} \right) \quad (22)$$

4.2 要素試験シミュレーション

4.2.1 解析条件

ここでは、中空ねじりによる液状化試験を対象にシミュレーションを実施し、従来の二次元 SD モデルと今回導入した三次元 SD モデルの挙動の違いについて考察する。

試料は豊浦砂を想定し、既往の研究によるパラメータ²³⁾を2つのモデルで同様に設定した。

ここで、繰返し载荷時の等体積条件を満たすため、二次元版の SD モデルでは水平x方向と鉛直z方向の各垂直ひずみ増分を0とした。一方、三次元版の SD モデルではこれらに加えて水平y方向の垂直ひずみ増分も0とし、y方向を面外方向とする平面ひずみ条件とした。

初期は偏差応力が0の等方応力状態とし、繰返しせん断応力は水平せん断応力 τ_{zx} を制御して载荷した。

4.2.2 解析結果

各モデルで得られた有効応力径路とせん断応力～せん断ひずみ関係を図-11に示す。ここに、有効拘束圧とせん断応力は有効拘束圧の初期値 p'_0 で正規化している。

二次元版では繰返し载荷回数が15回程度で有効拘束圧が0に達し、液状化しているものの、三次元版では20回程度で液状化しており、相対的にやや液状化強度比が大きくなっている。

これについては、前述のように、二次元版が面外のy方向の垂直応力と垂直ひずみを考慮しない単純二次元のモデルであるため、見掛けの体積弾性係数が大きくなる。このことから、両者の塑性体積ひずみ増分が等しい場合、等体積条件下での有効拘束圧の変動は三次元版の方が小さくなる。前述の繰返し载荷回数差は、塑性圧縮が卓越する偏差応力比の低い領域において、三次元版による有効拘束圧の低下が抑制されることで生じている。

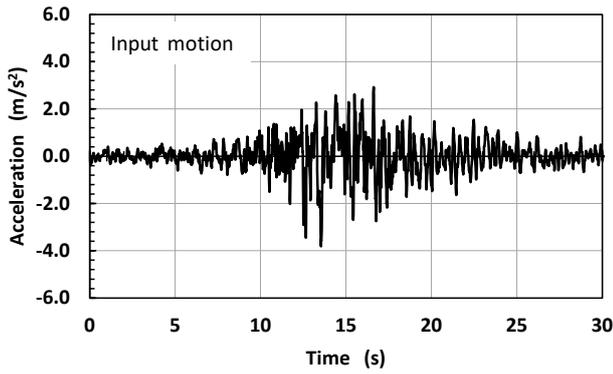


図-12 入力加速度時刻歴
Fig.12 Time history of input acceleration

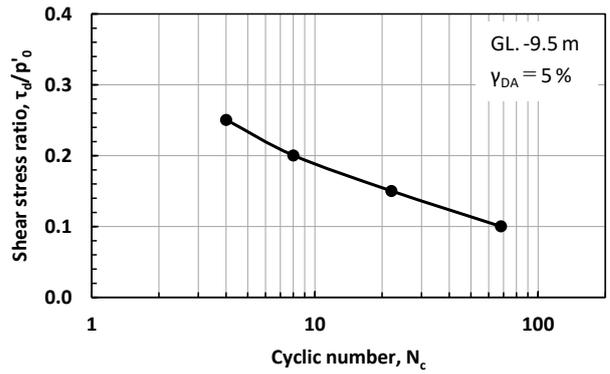


図-13 要素試験シミュレーションによる液状化強度曲線
Fig.13 Liquefaction strength curve with element test simulations

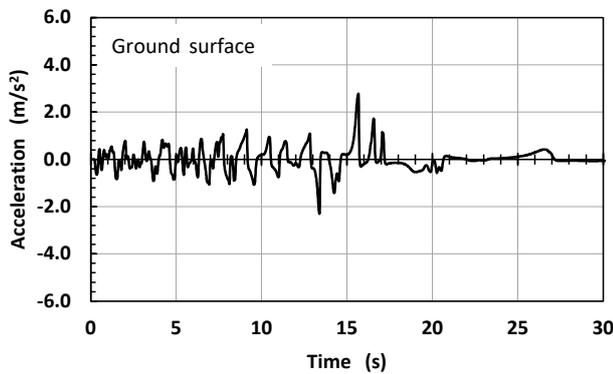


図-14 地表面における固相の水平加速度時刻歴
Fig.14 Time history of horizontal acceleration of solid phase on ground surface

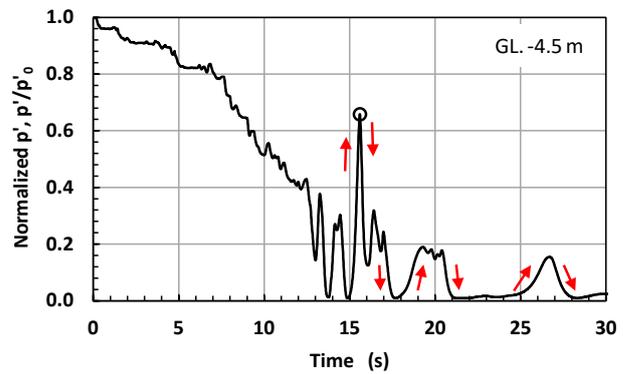


図-15 GL.-4.5 mにおける有効拘束圧時刻歴
Fig.15 Time history of effective confining pressure at GL.-4.5 m

また、せん断応力～せん断ひずみ関係が図-11の矢印のように逆S字型の履歴曲線を描く領域では、繰返しせん断に伴う有効拘束圧の変動が2つのモデルで概ね等しくなり、塑性体積ひずみ増分と塑性偏差ひずみ増分は三次元版の方が大きくなる。これにより、当該領域のせん断ひずみ振幅は三次元版の方が若干大きくなっている。

4.3 土柱モデルによるシミュレーション

4.3.1 解析条件

三次元SDモデルを用いて土柱モデルによる地震応答解析を行った。

土柱モデルは層厚20m、要素高さ1.0mピッチとした。水平y方向は u 、 w ともにすべて固定し、y方向を面外方向とする平面ひずみ条件とした。水平x方向、鉛直z方向については、底面の u 、 w を完全に固定し、剛基盤とした。それ以外の深度は u 、 w を2方向ともに自由とし、同一深度の u 、 w をそれぞれ等変位で拘束して左右の側面に周期境界を設定した。地表面は過剰間隙水圧が0の排水面である。

図-12に入力加速度時刻歴を示す。建築分野で用いら

れている告示波の一つであり、x方向に入力した。

重力加速度は $g=9.81\text{ m/s}^2$ とし、液状化地盤の密度、間隙比、透水係数は $\rho=2.0\text{ Mg/m}^3$ 、 $e=0.75$ 、 $k=1.0\times 10^{-4}\text{ m/s}$ で均質に設定して、間隙水の密度、体積弾性係数は $\rho^w=1.0\text{ Mg/m}^3$ 、 $K^w=2.2\times 10^6\text{ kN/m}^2$ とした。

SDモデルのパラメータは、前節と同様、豊浦砂を想定して文献(23)を参照した。ここで、ダイレイタンスパラメータ μ のひずみ依存性を制御する S_c は、液状化強度曲線が概ね同様になるよう、深度ごとに調整した。SDモデルで再現される両振幅せん断ひずみ $\gamma_{DA}=5\%$ の液状化強度曲線を図-13に示す。

動的解析における直接時間積分にはNewmarkの β 法を適用し、各種パラメータは $\Delta t=0.001\text{ s}$ 、 $\beta=0.3025$ 、 $\gamma=0.6$ とした。また、数値解析安定のためのRayleigh減衰は初期剛性比例型で設定し、 $\alpha=0$ 、 $\beta=0.003$ とした。

さらに、動的解析に引き続き、圧密解析を実施して地震時に発生した過剰間隙水圧を消散させた。

4.3.2 解析結果

地震時の代表的な結果として、地表面における固相の水平加速度 \ddot{u}_x 時刻歴を図-14に示し、GL.-4.5 mにお

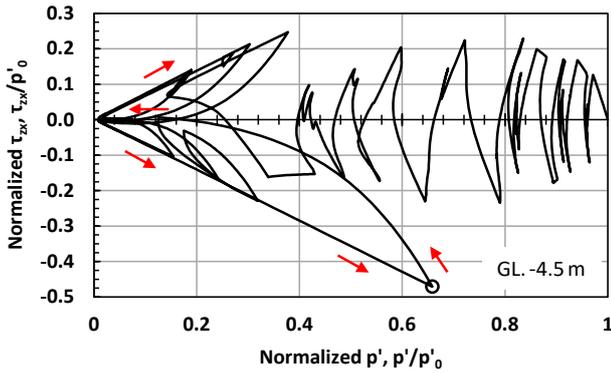


図-16 GL. -4.5mにおける有効応力径路
Fig.16 Effective stress path at GL. -4.5m

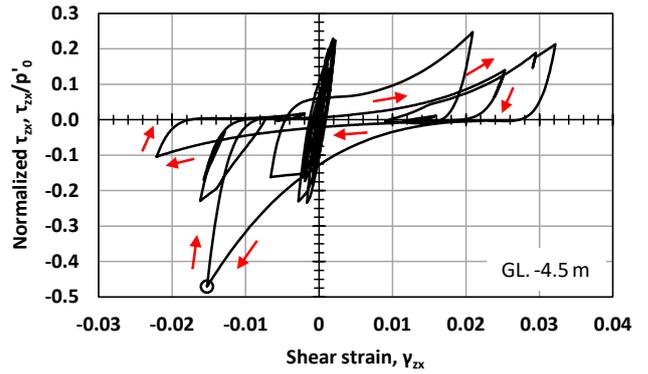


図-17 GL. -4.5mにおけるせん断応力～せん断ひずみ関係
Fig.17 Relationship between τ_{zx} and γ_{zx} at GL. -4.5m

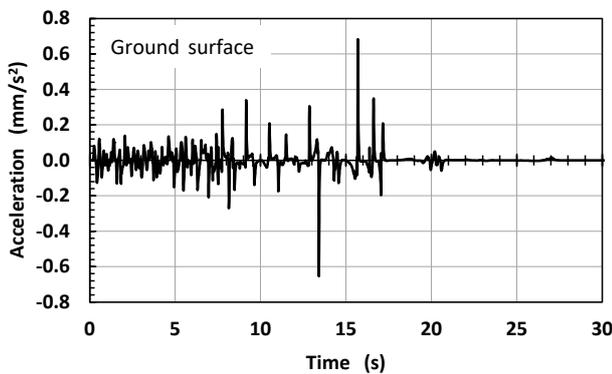


図-18 地表面における液相の水平平均相対加速度時刻歴
Fig.18 Time history of horizontal average relative acceleration of liquid phase on ground surface

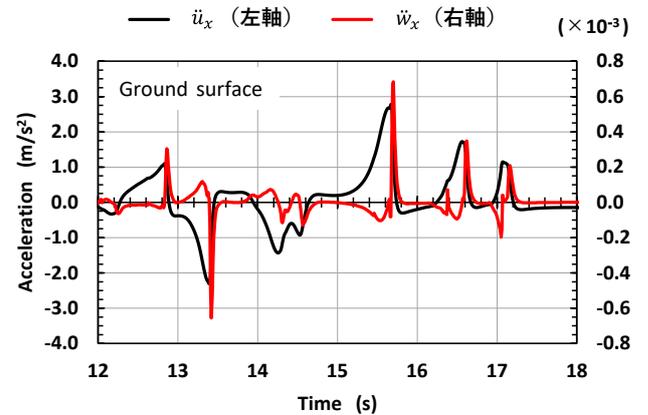


図-19 地表面における \ddot{u}_x と \ddot{w}_x の比較
Fig.19 Comparison of \ddot{u}_x and \ddot{w}_x on ground surface

ける有効拘束圧時刻歴，有効応力径路およびせん断応力～せん断ひずみ関係を図-15～図-17に示す。ここに，有効拘束圧とせん断応力は当該深度の初期有効拘束圧 p'_0 で正規化している。また，図-15～図-17では，時刻15秒付近の有効拘束圧のピーク時におけるデータを○で示している。

これらの図によると，入力加速度の振幅が 1.0m/s^2 未満の時刻8秒程度までは，地表面加速度に比較的短い周期の成分が認められ，GL. -4.5mにおける有効拘束圧の低下量は30%程度に，また，せん断ひずみ振幅は0.1%オーダーに抑えられている。しかしながら，時刻15秒付近で地表面加速度はややスパイク状に応答し，その後は振幅が減衰している。これは，図-15～図-17に矢印で示すように，塑性膨張と塑性圧縮が顕著に発生し，有効拘束圧と剛性が塑性膨張時に回復しながらも，塑性圧縮時には低下して液状化に至るためである。

また，u-w定式化特有の結果として，地表面における液相の水平平均相対加速度 \ddot{w}_x 時刻歴を図-18に示す。ここに，図-18の縦軸は単位が「 mm/s^2 」であることに注意されたい。図-14の固相の加速度と比較すると，液

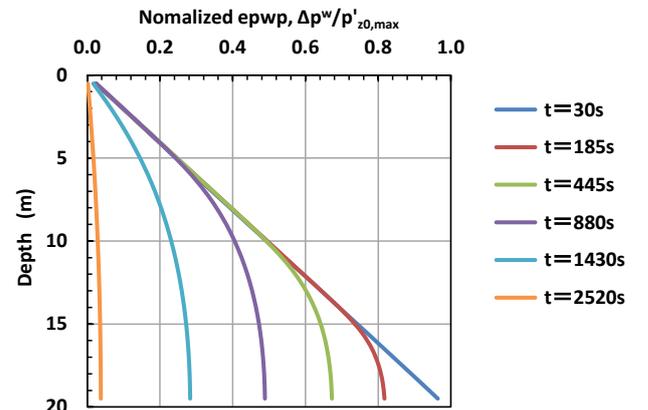


図-20 過剰間隙水圧の同時刻深度分布
Fig.20 Depth distributions of excess pore water pressure at the same time

相の平均相対加速度の振幅最大値は3～4オーダー小さいことから，固相と液相は巨視的にほぼ一体となって振動している。ただし，時間スケールを拡大した図-19で比較すると， \ddot{u}_x が急激な変化を示す時刻では，それと反対向きに \ddot{w}_x が鋭く応答している。詳細には液相の挙動に動的な浸透の影響が認められる。

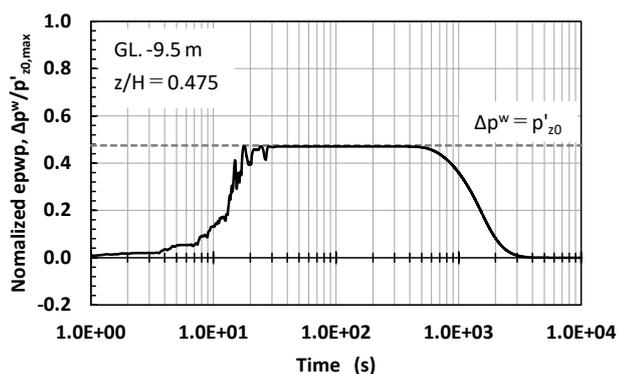


図-21 GL.-9.5mにおける過剰間隙水圧時刻歴
Fig.21 Time history of excess pore water pressure at GL.-9.5m

さらに、動的解析と後続の圧密解析による過剰間隙水圧の同時刻深度分布を図-20に示し、GL.-9.5mにおける過剰間隙水圧と地表面沈下量の各時刻歴を図-21、図-22に示す。ここに、過剰間隙水圧はGL.-20mの底面における初期有効上載圧 $p'_{z0,max}$ で正規化している。

時刻30秒における過剰間隙水圧は液状化によって全深度で概ね有効上載圧の初期値に達しており、それ以降は地表面に向かう透水に伴って下層から上層の順に低下している。詳しくはGL.-9.5mの時刻歴で考察すると、当該深度以深からの透水の影響を受け、地震後の概ね時刻500~4000秒にかけて水圧が消散している。地表面沈下は、間隙水が地表面から流出するため、地震時から既に生じているものの、本検討のような土柱モデルによるシミュレーションでは微小である。残留沈下量のほとんどは水圧消散が支配的な地震後に発生している。

以上のように、三次元SDモデルを適用した土柱モデルによるシミュレーションを行い、各種解析結果を分析した。これらのうち、液相の平均相対加速度は、既往の事例^{例えば、28)}が少ないが、固相との動的な相互作用によって図-19に示した特徴的な結果が得られ、興味深い。その他、地表面における固相の加速度や沈下量、過剰間隙水圧等については、これまでに多数の研究で報告されている液状化地盤の一般的な挙動と定性的に調和的であることが確認された。

5. まとめ

本研究では構造要素等の実装が豊富なTDAPIIIをプラットフォームとする二相系有効応力解析プログラムを開発し、本報文では基本的な機能について述べた。

本機能の支配方程式の定式化には、慣用のu-w定式化、u-U定式化、u-p定式化を比較し、適用性の最も高

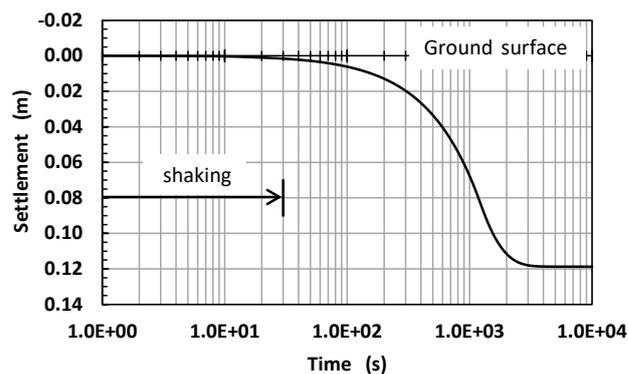


図-22 地表面沈下量時刻歴
Fig.22 Time history of settlement on ground surface

いu-w定式化を採用した。支配方程式に関わるプログラムの妥当性については、二相系弾性材料の解析解に基づく検証等を通じて確認している。

ただし、u-w定式化では、液相の慣性項を考慮しているものの、相対移流項が十分小さいと仮定している。そのため、相対移流項を考慮した、より厳密な定式化と比較すると、解析手法の実用上の目安として、透水係数が 10^{-2} m/sオーダー以下の範囲で用いるのが適当であると考えられる。

さらに、今回、液状化地盤の挙動を表現するための構成モデルとして三次元SDモデルを導入した。本モデルは微小ひずみ理論に基づく弾塑性構成モデルである。状態指数によって同一種類の砂質土の拘束圧依存性と密度依存性が自動的に考慮されるため、同じ土層に対しては、深度ごとのパラメータ設定を必要とせず、一組のパラメータセットでモデル化できるという特長がある。

地震時に上昇した過剰間隙水圧が地震後に消散するまでの一連の過程について、土柱モデルによるシミュレーションを実施した。その結果、地表面沈下量や過剰間隙水圧等において、一般的によく知られている液状化地盤の挙動と定性的に調和した解析結果が得られ、液状化解析プログラムとしての基本的な機能の妥当性が検証された。

なお、別報⁶⁾では、既往の遠心模型実験の再現シミュレーションを行い、三次元的な透水の影響や液状化地盤と杭の相互作用について検討している。参照されたい。

今後は、多方向加振の場合等のより一般化された条件におけるプログラムの有効性を検証するとともに、液状化に伴う構造物の沈下や浮上がり、地盤の側方流動の問題にも適用し、残留変位の再現性に着目した検証も実施する。さらに、実務的には、計算の高速化や

大規模モデルに要する対応等，適用拡大に向けた取組みも行う予定である。

謝辞

三次元 SD モデルの定式化とモデルの基本的な解析フローについては，Canterbury 大学 Misko Cubrinovski 教授にご指導いただきました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 内閣府：令和 5 年度防災白書，
<https://www.bousai.go.jp/kaigirep/hakusho/r5.html>，
2023/07/18 参照。
- 2) Biot, M.A. : General theory of three-dimensional consolidation, *Journal of Applied Physics*, Vol.12, No.4, pp.155-164, 1941.
- 3) Biot, M.A. : Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, *Journal of Applied Physics*, Vol.26, No.2, pp.182-185, 1955.
- 4) Biot, M.A. : Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.28, No.2, pp.168-191, 1956.
- 5) Biot, M.A. : Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *Journal of Applied Physics*, Vol.33, No.4, pp.1482-1498, 1962.
- 6) 岩井創，柴田景太，宇野浩樹，船原英樹：汎用三次元 FEM に二相系支配方程式を導入した液状化解析手法 — その 2 杭基礎を対象とした遠心力載荷実験の再現シミュレーション—，大成建設技術センター報，第 56 号，32，2023.
- 7) de Boer, R. : Contemporary progress in porous media theory, *Applied Mechanics Reviews*, Vol.53, Issue 12, pp.323-370, 2000.
- 8) Schrefler, B.A. : Mechanics and thermodynamics of saturated/unsaturated porous materials and quantitative solutions, *Applied Mechanics Reviews*, Vol.55, Issue 4, pp.351-388, 2002.
- 9) 渦岡良介，夜久将司，上田恭平：不飽和盛土の動的応答に対する間隙流体の相対加速度の影響，計算工学講演会論文集，Vol.26, E-05-05, 2021.
- 10) 豊田智大，野田利弘：u-w-p 定式化に基づく水～土骨格連成計算における制約条件としての非排水条件の実装と検証，計算工学講演会論文集，Vol.23, G-10-06, 2018.
- 11) 久田俊明，野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用，丸善，pp.24-25, 1995.
- 12) Noda, T. and Toyoda, T. : Development and verification of a soil-water coupled finite deformation analysis based on u-w-p formulation with fluid convective nonlinearity, *Soils and Foundations*, Vol.59, Issue 4, pp.888-904, 2019.
- 13) Oka, F., Yashima, A., Shibata, T., Kato, M., and Uzuoka, R. : FEM-FDM coupled liquefaction analysis of a porous soil using an elasto-plastic model, *Applied Scientific Research*, Vol.52, pp.209-245, 1994.
- 14) (社)地盤工学会：地盤工学・基礎理論シリーズ 2 地盤の動的解析 —基礎理論から応用まで—，pp.88-95, 2007.
- 15) Zienkiewicz, O.C. and Shiomi, T. : Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized Biot formulation and its numerical solution, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.8, pp.71-96, 1984.
- 16) 宇野浩樹，船原英樹：二相系定式化の違いが間隙率の異なる飽和互層地盤の地震時挙動に及ぼす影響，令和 2 年度土木学会全国大会第 75 回年次学術講演会，III-136，2020.
- 17) 宇野浩樹，船原英樹：二相系 u-U 定式化に基づく水—土連成有限要素解析の精度向上 —間隙率の新たな空間離散化手法の提案と妥当性確認—，大成建設技術センター報，第 55 号，34，2022.
- 18) 三浦房紀，沖中宏志：仮想仕事の原理に基づく粘性境界を用いた三次元構造物-地盤系の動的解析法，土木学会論文集，第 404 号/I-11，pp.395-404，1989.
- 19) Akiyoshi, T., Fuchida, K. and Fang, H.L. : Absorbing boundary conditions for dynamic analysis of fluid saturated porous media, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.13, pp.387-397, 1994.
- 20) Akiyoshi, T., Fang, H.L., Fuchida, K. and Matsumoto, H. : A non-linear seismic response analysis method for saturated soil-structure system with absorbing boundary, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.1.20, pp.307-329, 1996.
- 21) Simon, B.R., Zienkiewicz, O.C. and Paul, D.K. : An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.1.8, pp.381-398, 1984.
- 22) 山口柏樹：土質力学，技報堂出版，pp.114-125，1984.
- 23) Cubrinovski, M. and Ishihara, K. : State concept and modified elastoplasticity for sand modelling, *Soils and Foundations*, Vol.38, No.4, pp.213-225, 1998.
- 24) Das, S., Bradley, B. and Cubrinovski, M. : A three dimensional plasticity model for sands based on state concept, *Applied Mechanics and Materials*, Vol.553, pp.482-488, 2014.
- 25) 吉田望：地盤の地震応答解析，鹿島出版会，pp.33-38，2010.
- 26) Ishihara, K. : Liquefaction and flow failure during earthquake, 33rd Rankine Lecture, *Geotechnique*, Vol.43, No.3, pp.351-415, 1993.
- 27) Gutierrez, M., Ishihara, K. and Towhata, I. : Flow theory for sand during rotation of principal stress direction, *Soils and Foundations*, Vol.31, No.4, pp.121-132, 1991.
- 28) 岡二三生，小高猛司，森本良，喜多信代：相対加速度を考慮した有限変形液状化解析法の適用性，平成 14 年度土木学会全国大会第 57 回年次学術講演会，III-539，pp.1077-1078，2002.