

# 二相系 u-U 定式化に基づく水-土連成有限要素解析の精度向上

間隙率の新たな空間離散化手法の提案と妥当性確認

宇野 浩樹\*<sup>1</sup>・船原 英樹\*<sup>1</sup>

Keywords : theory of saturated porous media, u-U formulation, porosity, discharge flow rate, pore water pressure, continuity  
飽和多孔質体理論, u-U 定式化, 間隙率, 流量, 間隙水圧, 連続性

## 1. はじめに

圧密や液状化等の水-土連成問題に関する支配方程式は、飽和土を固相と液相の二相系からなると仮定した Biot の飽和多孔質体理論<sup>1), 2), 3), 4)</sup>によって導かれる。支配方程式は、固相の変位 $u$ 、液相の変位 $U$ 、液相の固相に対する平均相対変位 $w$ 、間隙水圧 $p$ を変数として記述されるが、未知数や近似の違いによって、さまざまな定式化がある<sup>例えば, 5)</sup>。それらのうち、本研究では、液相の圧縮性を仮定して、固相の変位 $u$ および液相の変位 $U$ を未知数とする u-U 定式化<sup>6)</sup>に着目する。本定式化は、液相の慣性を近似せずに厳密に考慮するため、高周波成分を含む地震動や透水性の高い地盤に対する適用性が高いと言われており<sup>5)</sup>、これに基づく有限要素解析(以下、「FE 解析」)<sup>例えば, 6), 7)</sup>が変位予測や対策設計等を目的に前述の連成問題に広く用いられている。

一方、有限要素法(以下、「FEM」)による飽和地盤のモデル化では、地層の種類や密度の違い等によって要素間の間隙率の変化が不連続となる場合がある。このような場合に u-U 定式化を適用すると、要素間の隣接面上の流量と間隙水圧に連続性が成立せず<sup>8)</sup>、解析精度が低下するという課題がある。著者らは、間隙率が互層状に異なる 1 次元弾性地盤の鉛直震動問題において、流量と間隙水圧の連続性が常に成立する u-w 定式化<sup>例えば, 9)</sup>と比較し、u-U 定式化による誤差が要素間の間隙率の違いや透水係数、周波数に依存することを示している<sup>10)</sup>。

本研究では、隣接面上の流量と間隙水圧の連続性の観点から、前述した u-U 定式化に基づく従来の FE 解析の課題について、具体的な解析例とともに説明し、その解決策を提案する。さらに、1 次元問題に関するケーススタディを通じて、解決策の妥当性を確認する。

## 2. 従来の FE 解析における課題

### 2.1 流量および間隙水圧の連続性

ここでは、図-1 に示すように、地盤モデルが間隙率等の異なる 2 種類の飽和土(飽和土 1, 飽和土 2)からなり、モデルの左端と右端の水圧差によって間隙水が流れる 1 次元浸透問題を想定する。この問題では、式(1)のように、隣接面上の物質収支の観点より、飽和土 1 から流出する間隙水は過不足なく、飽和土 2 に流入する必要がある( $\hat{q}^+ = -\hat{q}^-$ )。また、連通管の原理より、式(2)のように、飽和土 1 と飽和土 2 の隣接面上の間隙水圧は等しくなければならない( $\hat{p}^+ = \hat{p}^-$ )。

$$\begin{aligned}\hat{q}^- + \hat{q}^+ &= \int_{\hat{S}} (\hat{v}_i^- \hat{n}_i^- + \hat{v}_i^+ \hat{n}_i^+) dS \\ &= \int_{\hat{S}} (\hat{v}_i^- - \hat{v}_i^+) \hat{n}_i^- dS = 0\end{aligned}\quad (1)$$

$$\therefore \hat{q}^+ = -\hat{q}^-, \hat{v}_i^+ = \hat{v}_i^-$$

$$\begin{aligned}\int_{\hat{S}} (-\hat{p}^- \hat{n}_i^- - \hat{p}^+ \hat{n}_i^+) dS &= \int_{\hat{S}} (-\hat{p}^- + \hat{p}^+) \hat{n}_i^- dS = 0 \\ \therefore \hat{p}^+ &= \hat{p}^-\end{aligned}\quad (2)$$

ここに、図-1 と式(1)、式(2)で用いた変数は次の通りである。 $L_{E1}$ ,  $L_{E2}$ : 飽和土 1, 飽和土 2 の長さ,  $A_E$ : 断面積,  $n_{E1}$ ,  $n_{E2}$ : 飽和土 1, 飽和土 2 の間隙率,  $k_{E1}$ ,  $k_{E2}$ : 飽和土 1, 飽和土 2 の透水係数,  $\bar{p}_L$ ,  $\bar{p}_R$ : 地盤モデルの左端および右端の間隙水圧(圧縮: 正),  $q_L$ ,  $q_R$ : 地盤モデルの左端および右端の流量(流出量: 正),  $dS$ : 隣接面 $\hat{S}$ 上の微小面積,  $\hat{n}_i^-$ ,  $\hat{n}_i^+$ : 飽和土 1, 飽和土 2 の隣接面 $\hat{S}$ 上の外向き単位法線ベクトル( $\hat{n}_i^+ = -\hat{n}_i^-$ ),  $\hat{q}^-$ ,  $\hat{q}^+$ : 飽和土 1, 飽和土 2 の隣接面 $\hat{S}$ 上の流量,  $\hat{v}_i^-$ ,  $\hat{v}_i^+$ : 飽和土 1, 飽和土 2 の隣接面 $\hat{S}$ 上の流速ベクトル,  $\hat{p}^-$ ,  $\hat{p}^+$ : 飽和土 1, 飽和土 2 の隣接面 $\hat{S}$ 上の間隙水圧

\*1 技術センター 社会基盤技術研究部 地盤研究室

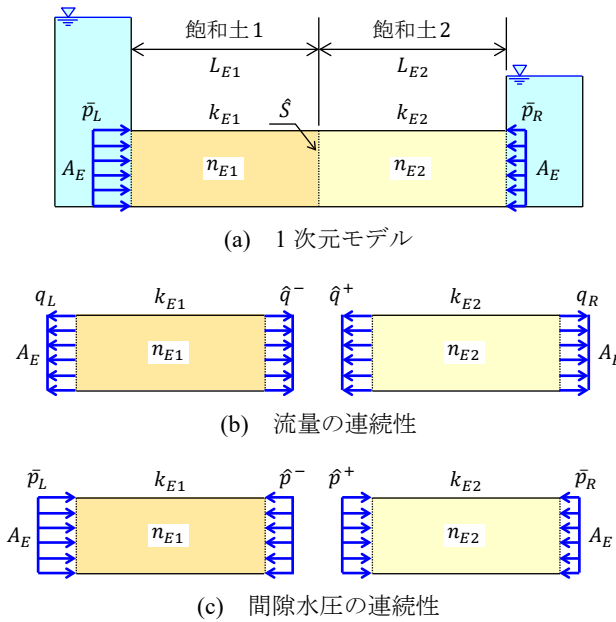


図-1 隣接面上の流量および間隙水圧の連続性  
Fig.1 Continuities of discharge flow rate and pore water pressure on an adjacent surface

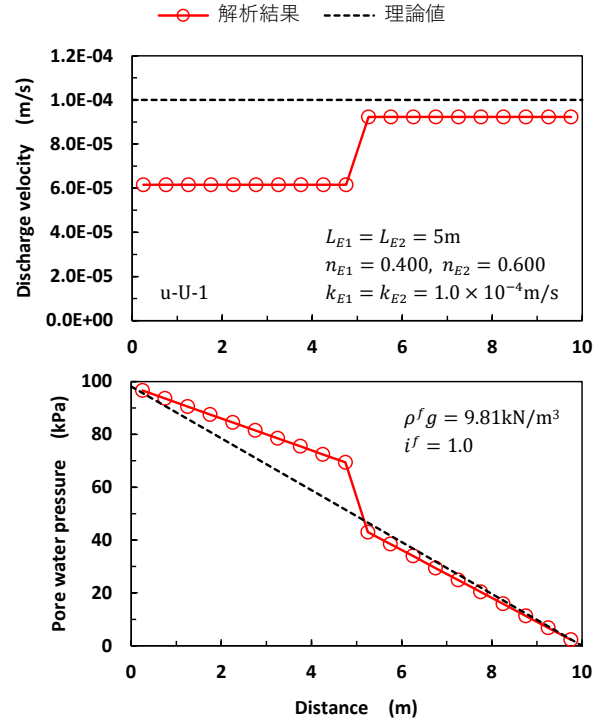


図-2 u-U 定式化に基づく従来の FE 解析の結果  
Fig.2 Results of the conventional finite element analysis based on the u-U formulation

本研究では、式(1)および式(2)が成立することをもって、隣接面上の流量と間隙水圧が連続すると定義する。

## 2.2 具体的な解析例

本節では、図-1 の 1 次元浸透問題に要素間の間隙率が不連続に変化する条件を与え、u-U 定式化に基づく従来の FE 解析を適用する。すなわち、前述の課題に関する具体的な解析例を示す。なお、支配方程式や離散化等の詳細は次章に譲るが、以下では、固相の変位を固定し、液相のつり合い式のみを解析する。

モデルの寸法は、飽和土 1、飽和土 2 の長さを  $L_{E1} = L_{E2} = 5\text{m}$ 、断面積を  $A_E = 1.0\text{m}^2$  とし、要素のメッシュを  $0.5\text{m}$  ピッチで設定した。間隙率は、飽和土 1～飽和土 2 の境界で不連続に変化するよう、 $n_{E1} = 0.400$ 、 $n_{E2} = 0.600$  とした。透水係数は、 $k_{E1} = k_{E2} = 1.0 \times 10^{-4}\text{m/s}$  とし、モデル内で均質に設定した。重力加速度を  $g = 9.81\text{m/s}^2$ 、間隙水の密度を  $\rho^f = 1.0\text{Mg/m}^3$  とし、モデルの左端および右端の間隙水圧を  $\bar{p}_L = 98.1\text{kN/m}^2$ 、 $\bar{p}_R = 0\text{kN/m}^2$  とした。このように、間隙水がモデルの左端から右端に向かって流れる動水勾配  $i^f = 1.0$  の浸透場の条件を設定した。さらに、間隙水の体積弾性係数を  $K^f = 2.2 \times 10^{30}\text{kN/m}^2$  とし、液相を近似的に非圧縮とした。

解析結果として、定常状態における要素内の流速と間隙水圧の分布図を図-2 に示す。それぞれの分布図には Darcy 則による理論値も示している。ここで、要素 E 内の流速  $v_E$  は、要素 E 内の間隙率  $n_E$ 、要素構成節点 K の液相速度  $\bar{U}_K$ 、形状関数  $N_K^U$  より、 $v_E = n_E N_K^U \bar{U}_K$  によ

って求めている。

図のように、u-U 定式化に基づく従来の FE 解析では、間隙率の変化が不連続となるモデル中央の隣接面上において、前述の連続性が成立しないため、理論値が再現されず、誤差が生じている。

## 3. 課題解決のための提案

### 3.1 支配方程式

Biot の飽和多孔質体理論による支配方程式を式(3)～式(10)に示す。以下の支配方程式では液相の加速度の固相に対する相対移流項<sup>8)</sup>が十分小さいとしている。また、ひずみは微小ひずみを仮定し、土粒子は非圧縮としている。応力およびひずみの符号については引張を正とし、間隙水圧は圧縮を正としている。

<固相のつり合い式>

$$(\rho - n\rho^f)\ddot{u}_i - n^2\rho^f g k_{ij}^{-1}(\dot{U}_j - \dot{u}_j) = \sigma'_{ij,j} - (1-n)p_{,i} + (\rho - n\rho^f)b_i \quad (3)$$

<液相のつり合い式>

$$n\rho^f \ddot{U}_i + n^2\rho^f g k_{ij}^{-1}(\dot{U}_j - \dot{u}_j) = -np_{,i} + n\rho^f b_i \quad (4)$$

<飽和土のつり合い式>

$$\rho \ddot{u}_i + \rho^f \ddot{w}_i = \sigma_{ij,j} + \rho b_i \quad (5)$$

<間隙水のつり合い式>

$$\rho^f \ddot{u}_i + \frac{\rho^f}{n} \ddot{w}_i + \rho^f g k_{ij}^{-1} \dot{w}_j = -p_{,i} + \rho^f b_i \quad (6)$$

<連続式>

$$n(\dot{U}_{i,i} - \dot{u}_{i,i}) + \dot{u}_{i,i} + \frac{n}{K^f} \dot{p} = 0 \quad (7a)$$

$$\{n(\dot{U}_i - \dot{u}_i)\}_{,i} + \dot{u}_{i,i} + \frac{n}{K^f} \dot{p} = 0 \quad (7b)$$

$$\dot{w}_{i,i} + \dot{u}_{i,i} + \frac{n}{K^f} \dot{p} = 0 \quad (7c)$$

<有効応力の定義式>

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \quad (8)$$

<平均相対変位の定義式>

$$w_i = n(U_i - u_i) \quad (9)$$

<構成式>

$$\Delta \sigma'_{ij} = D_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^s, \quad \Delta \varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \quad (10)$$

ここに、 $u_i$ ,  $U_i$ ,  $w_i$  : 固相の変位ベクトル, 液相の変位ベクトルと平均相対変位ベクトル,  $\rho^f$ ,  $\rho$  : 間隙水の密度, 飽和土の密度,  $n$ ,  $k_{ij}$ ,  $K^f$  : 間隙率, 透水係数テンソル, 間隙水の体積弾性係数,  $\sigma_{ij}$ ,  $\sigma'_{ij}$ ,  $p$  : 全応力テンソル, 有効応力テンソル, 間隙水圧,  $\varepsilon_{ij}^s$  : 固相のひずみテンソル,  $D_{ijkl}$  : 構成関係テンソル,  $g$ ,  $b_i$  : 重力加速度, 物体力ベクトル,  $\delta_{ij}$  : クロネッカーのデルタ

本研究では 3 種類の定式化とこれらによる FE 解析を扱う。従来の  $u$ - $U$  定式化<sup>6)</sup> (以下, 「 $u$ - $U$ -1」), 本研究で提案する  $u$ - $U$  定式化 (以下, 「 $u$ - $U$ -2」), 既往の  $u$ - $w$  定式化<sup>9)</sup> (以下, 「 $u$ - $w$ 」) の 3 種類である。このうち,  $u$ - $w$  は固相の変位  $u$  および液相の平均相対変位  $w$  を未知数とする定式化であり, これによる FE 解析では前述の連続性が常に成立する。本研究における位置付けは, 後述の理論解のないケーススタディに対して参照解を得るためのものである。

各定式化で適用するつり合い式と連続式を表-1 に示す。いずれの定式化においても, 連続式によって間隙水圧  $p$  を未知数から消去する。

表-1 つり合い式および連続式

Table 1 Equations of equilibrium and continuity

Formulation	Equilibrium	Continuity
u-U-1	(1), (2)	(5a)
u-U-2	(1), (2)	(5b)
u-w	(3), (4)	(5c)

### 3.2 離散化

#### (1) FEM の適用

直接解く方程式は, 表-1 のつり合い式の離散化形式

による連立マトリックス方程式であり, いずれの定式化も, つり合い式の空間離散化にはアイソパラメトリック要素による FEM を適用する。なお, 次章のケーススタディでは, 1 次のアイソパラメトリック要素を用い, 固相の変位  $u$ , 液相の変位  $U$  と平均相対変位  $w$  に対して同じ形状関数を仮定する。

#### (2) 間隙率マトリックスの導入

$u$ - $U$ -2 においては, さらに, 要素内の間隙率を節点に離散化するための,  $m \times m$  で正方な対角マトリックス (以下, 「間隙率マトリックス  $\bar{n}_K$ 」) を定義し, 導入する。ここに, 次数  $m$  は節点変位の自由度数と等しい。

$\bar{n}_K$  は節点  $K$  に対応する成分を次式のように設定する。

$$\bar{n}_K = \left[ \frac{\sum_E (dV)_E}{\sum_E \left(\frac{dV}{n}\right)_E} \right]_K \quad (11)$$

ここに,  $\bar{n}_K$  : 間隙率マトリックス,  $\sum_E (dV)_E$  : つり合い式の弱形式において要素  $E$  から要素構成節点  $K$  に離散化される飽和土の体積の合計,  $\sum_E (dV/n)_E$  : 要素内の間隙率  $n$  の逆数で重み付けした飽和土の体積の合計

ここで, 間隙率が要素内で分布する場合は, 要素  $E$  内の各積分点における  $dV$ ,  $dV/n$  を要素  $E$  の領域で積分し, それらを  $(dV)_E$ ,  $(dV/n)_E$  として  $\bar{n}_K$  を設定する。

$\bar{n}_K$  の導入により, 要素内の平均相対変位ベクトルは次式のように近似できると仮定する。

$$n(U_i - u_i) = N_K^U \bar{n}_K \bar{U}_{Ki} - N_K^u \bar{n}_K \bar{u}_{Ki} \quad (12)$$

ここに,  $\bar{u}_{Ki}$ ,  $\bar{U}_{Ki}$  : 要素構成節点  $K$  における固相の変位ベクトルおよび液相の変位ベクトル,  $N_K^u$ ,  $N_K^U$  : 固相の変位  $u$  および液相の変位  $U$  に関する形状関数マトリックス

さらに, 式(12)の仮定により, 要素内の液相の慣性項 (式(4)の左辺第 1 項) および透水に伴う相互作用項 (式(3), 式(4)の左辺第 2 項) を次式で近似した平均相対加速度ベクトルと平均相対速度ベクトルによって記述する。

$$n(\ddot{U}_i - \ddot{u}_i) = N_K^U \bar{n}_K \ddot{\bar{U}}_{Ki} - N_K^u \bar{n}_K \ddot{\bar{u}}_{Ki} \quad (13)$$

$$n(\dot{U}_i - \dot{u}_i) = N_K^U \bar{n}_K \dot{\bar{U}}_{Ki} - N_K^u \bar{n}_K \dot{\bar{u}}_{Ki} \quad (14)$$

間隙水圧  $p$  については, 連続式(7b)の増分形から間隙水の構成式を導出し, 要素内の間隙水圧増分  $\Delta p$  を次式のように近似する。

$$\Delta p = -Q\{N_{K,i}^u(1 - \bar{n}_K)\Delta \bar{u}_{Ki} + N_{K,i}^U \bar{n}_K \Delta \bar{U}_{Ki}\} \quad (15)$$

ここに、 $N_{K,i}^u, N_{K,i}^U$  : 形状関数マトリックス  $N_K^u, N_K^U$  の導関数、 $Q$  : Biot 係数 ( $= K^f/n$ )

(3) 提案する解決策の特徴

u-U-2 による FE 解析においては、間隙率マトリックス  $\bar{n}_K$  の導入により、連立マトリックス方程式の各項の間隙率が隣接面を形成する節点での値で表現されるため、前述の連続性が常に成立する。すなわち、式(12)~(14)によって隣接面上の流量の連続性が常に成立する。また、要素内の間隙水圧を式(15)によって記述し、各相の分応力テンソル (固相:  $\sigma'_{ij} - (1-n)p\delta_{ij}$ , 液相:  $-np\delta_{ij}$ ) に伴う等価節点力を  $\bar{n}_K$  で表すため、間隙水圧の連続性も常に成立する。

さらに、 $\bar{n}_K$  の節点  $K$  に対応する成分を式(11)のように設定することにより、要素間の間隙率が不連続となる隣接面上においては、液相の加速度、速度、変位の各ベクトル  $\ddot{U}_i, \dot{U}_i, U_i$  が隣接面上で不連続となる真の応答の加重平均 (重み係数:  $(dV)_E$ ) で求められる。これについては 4.1 節において補足する。

## 4. ケーススタディによる妥当性確認

### 4.1 1次元準静的浸透問題

#### 4.1.1 解析条件

本節では 2.2 節の 1次元浸透問題に u-U-2 による準静的な FE 解析を適用する。

モデルの寸法や解析用物性値、境界条件等は前述の通りである。u-U-2 による FE 解析の適用に際しては、慣性項を除いた準静的解析とし、時間離散化には後退差分法を用いた。

#### 4.1.2 間隙率マトリックス

間隙率マトリックス  $\bar{n}_K$  の成分は、飽和土 1, 飽和土 2 の一般部に対して 0.400, 0.600 となる。一方、飽和土 1~飽和土 2 の境界については、要素のメッシュが等断面積 ( $1.0m^2$ ) かつ等ピッチ (0.5m) であることから、 $(2 \times 0.400 \times 0.600)/(0.400 + 0.600) = 0.480$  となる。

#### 4.1.3 解析結果

まず、定常状態における要素内の流速と間隙水圧の分布図を図-3 に示す。それぞれの分布図には Darcy 則による理論値も示している。ここで、u-U-2 による FE 解析では、要素 E 内の流速  $v_E$  が、要素構成節点  $K$  の間隙率  $\bar{n}_K$  および液相速度  $\dot{U}_K$ 、形状関数  $N_K^U$  を用い、 $v_E = N_K^U \bar{n}_K \dot{U}_K$  によって求められる。

図に示すように、u-U-2 による FE 解析では、流速と

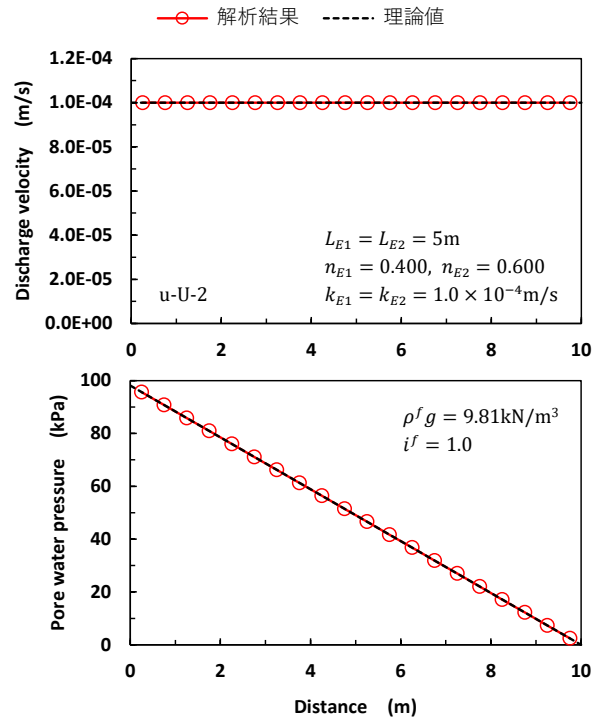


図-3 定常状態における流速および間隙水圧  
Fig.3 Discharge velocity and pore water pressure in a steady state

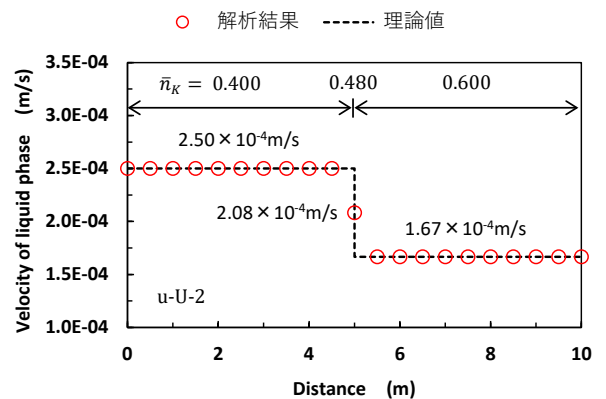


図-4 定常状態における液相速度  
Fig.4 Velocity of liquid phase in a steady state

間隙水圧とともに、Darcy 則による理論値とよく一致しており、妥当な解析結果が得られることが確認された。

さらに、定常状態における節点の液相速度  $\dot{U}_K$  の分布図を図-4 に示す。 $\dot{U}_K$  は、間隙率の変化と同様、モデル中央の隣接面上において不連続となっている。u-U-2 による FE 解析では  $\dot{U}_K$  が  $(dV)_E$  を重み係数とする加重平均として求められるが、要素のメッシュが等断面積かつ等ピッチであるため、モデル中央では飽和土 1, 飽和土 2 の単純平均として得られている。

### 4.2 1次元動的浸透問題

#### 4.2.1 解析条件

本節においては、2.2 節の 1次元浸透問題に u-U-2 に

よる動的な FE 解析を適用し、モデル両端に水圧差を作用させた瞬間からの流速等の経時変化を、慣性項を考慮して動的に解析する。ただし、2.2 節および 4.1 節と同様、本節においても、固相の変位を固定し、液相のつり合い式のみを解析する。

飽和土 1, 飽和土 2 の長さ  $L_{E1}$ ,  $L_{E2}$  を除くモデルの寸法や解析用物性値, 境界条件等は前述の通りである。本節では  $L_{E1}$ ,  $L_{E2}$  を  $L_{E1}=3\text{m}$ ,  $L_{E2}=7\text{m}$  とした。

また、時間離散化には Newmark の  $\beta$  法を適用し、計算時間増分  $\Delta t$  および Newmark の  $\beta$  法の係数  $\beta$ ,  $\gamma$  は、 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-8}\text{s}$ ,  $\beta = 0.3025$ ,  $\gamma = 0.6$  とした。

#### 4.2.2 既往の研究による理論解

Noda and Toyoda(2019) は、飽和土のつり合い式(5), 間隙水のつり合い式(6), 連続式(7c) (ただし、液相は非圧縮;  $K^f = \infty$ ) を支配方程式とする  $u$ - $w$ - $p$  定式化に基づき、本節の 1 次元動的浸透問題で得られる流速の理論解を導出している<sup>8)</sup>。Noda and Toyoda(2019) による流速の理論解を次式に示す。

$$v = kif \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{ng}{k}t\right) \right\} \quad (16)$$

ここに、 $v$ : 流速,  $n$ ,  $k$ : 間隙率, 透水係数,  $i^f$ : 動水勾配,  $g$ : 重力加速度,  $t$ : 時間

ここで、式(16)の理論解は、空間的に一様な流速  $v$  が時間経過とともに単調に増加し、時間  $t = \infty$  の定常時に Darcy 流速 ( $= kif$ ) に一致することを示している。 $v$  の空間上の一様性は、固相および液相を非圧縮とする場合の連続式 ( $\dot{w}_{i,i} = 0$ ) から導かれる。 $u$ - $U$ -2 による FE 解析においては、前述のように、固相の変位を固定して固相を非圧縮とし、間隙水の体積弾性係数を  $K^f = 2.2 \times 10^{30}\text{kN/m}^2$  と設定することで液相を近似的に非圧縮とした。

また、本節の 1 次元動的浸透問題では流速  $v$  ( $=$ 平均相対速度  $\dot{w}$ ) とともに加速度  $dv/dt$  ( $=$ 平均相対加速度  $\dot{w}$ ) も空間的に一様になり、モデル内の間隙水は一体的に浸透する。一方、本節のモデルは間隙率が不均質なため、式(16)の適用に際しては間隙水の一体的な浸透が表現できる等価な間隙率  $n_{EQ}$  を設定する必要がある。 $n_{EQ}$  は、間隙水のつり合い式(6)の慣性項を各領域で積分し、それらの関係式から以下のように求められる。

$$\frac{\rho^f}{n_{EQ}} A_E (L_{E1} + L_{E2}) = \frac{\rho^f}{n_{E1}} A_E L_{E1} + \frac{\rho^f}{n_{E2}} A_E L_{E2} \quad (17)$$

$$\therefore n_{EQ} = n_{E1} n_{E2} \frac{L_{E1} + L_{E2}}{n_{E2} L_{E1} + n_{E1} L_{E2}}$$

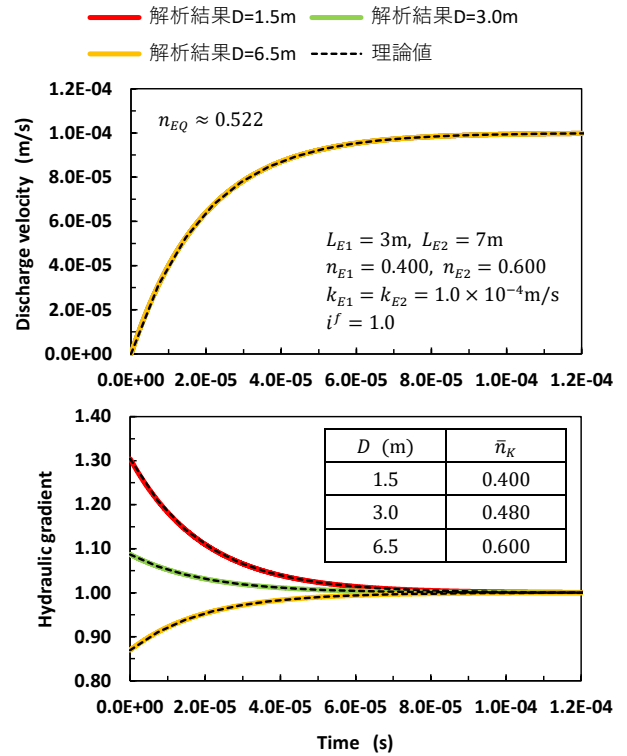


図-5 動的浸透問題の解析結果  
Fig.5 Results of a dynamic seepage analysis

ここに、 $n_{EQ}$ : モデル全体の等価な間隙率,  $n_{E1}$ ,  $n_{E2}$ : 飽和土 1, 飽和土 2 の間隙率,  $L_{E1}$ ,  $L_{E2}$ : 飽和土 1, 飽和土 2 の長さ,  $A_E$ : 断面積,  $\rho^f$ : 間隙水の密度  
 $n_{E1}=0.400$ ,  $n_{E2}=0.600$ ,  $L_{E1}=3\text{m}$ ,  $L_{E2}=7\text{m}$  より、モデル全体の等価な間隙率は  $n_{EQ} \approx 0.522$  となる。

さらに、モデル内の間隙率 (飽和土 1, 飽和土 2 の一般部: 0.400, 0.600, 飽和土 1~飽和土 2 の境界でモデル左端からの距離  $D=3\text{m}$  の位置: 0.480) と式(16)に基づく  $v$  および  $dv/dt$  を式(6)に代入すると、当該間隙率に対応する局所的な動水勾配の理論値が求められる。

#### 4.2.3 解析結果

解析結果として、モデル左端からの距離  $D = 1.5\text{m}$ ,  $3.0\text{m}$ ,  $6.5\text{m}$  における流速  $v$  と局所的な動水勾配  $i^f$  の経時変化を図-5 に示す。同図には前述の理論値も示している。解析結果はいずれも節点における応答である。節点 K の流速  $v_K$  は当該節点の間隙率  $\bar{n}_K$  と液相速度  $\dot{U}_K$  から  $v_K = \bar{n}_K \dot{U}_K$  によって求められ、動水勾配  $i_K^f$  は近傍要素間の水圧差に伴う水頭差  $\Delta h_E$  と当該要素重心間の長さ  $\Delta L_E$  から  $i_K^f = -\Delta h_E / \Delta L_E$  によって求められる。

図に示すように、解析結果は、流速、動水勾配ともに、理論値とよく一致している。すなわち、空間的に一様で非定常な流速の浸透場が適切に再現されており、間隙率の違いに応じた局所的な動水勾配の挙動が精度良く表現されている。

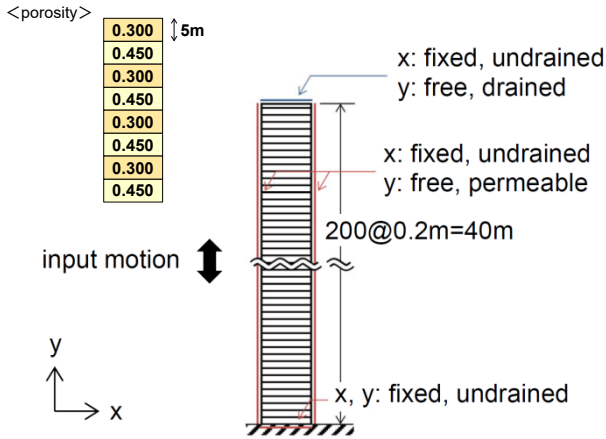


図-6 鉛直震動問題で用いた解析モデル

Fig.6 Analytical model applied in a vertical seismic problem

以上より、間隙率の不連続面を含む地盤モデルの浸透問題に、液相の慣性を考慮した動的解析を適用する場合も、u-U-2 の FE 解析によって妥当な解析結果が得られることが確認された。

### 4.3 1次元鉛直震動問題

#### 4.3.1 解析条件

本節の1次元鉛直震動問題は、理論解が得られないため、u-w による FE 解析の結果を参照解とし、u-U-1 および u-U-2 の u-w に対する誤差を比較して検討した。

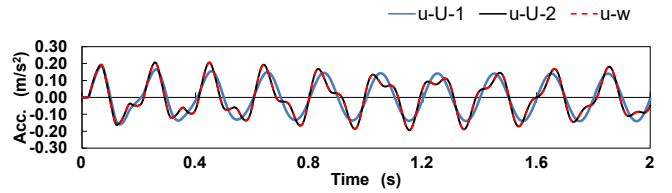
解析モデルを図-6 に示す。層厚は 40m とし、要素の高さは 0.2m とした。底面の境界条件は固相の変位  $u$  を完全に固定し、液相の変位  $U$  あるいは平均相対変位  $w$  も完全に固定して非排水とした。側面および地表面の境界条件は鉛直方向の  $u$ ,  $U$ ,  $w$  のみを自由とした。固相の構成則は線形弾性モデルとした。

間隙率  $n$  は、要素内で均質とし、上層から深度方向に 5m ピッチで 0.300, 0.450, 0.300, ..., 0.450 と互層状に変化させた。透水係数  $k$  は  $1.0 \times 10^{-8}$ ,  $1.0 \times 10^{-7}$ , ...,  $1.0 \times 10^{-1}$  m/s とし、数値実験という位置付けによって、各解析ケースでモデル全体に均質に与えた。飽和土の密度  $\rho$ , ヤング係数  $E$ , ポアソン比  $\nu$  は、 $\rho = 2.0 \text{Mg/m}^3$ ,  $E = 2.0 \times 10^4 \text{kN/m}^2$ ,  $\nu = 0.25$  とした。間隙水は密度  $\rho^f = 1.0 \text{Mg/m}^3$ , 体積弾性係数  $K^f = 2.2 \times 10^6 \text{kN/m}^2$  とし、重力加速度  $g$  は  $g = 9.81 \text{m/s}^2$  とした。荷重条件については鉛直地動加振とし、波形は加速度振幅  $A_{max} = 0.1 \text{m/s}^2$ , 波数  $N = 10$  波の正弦波とした。周波数  $f$  は解析ケースごとに 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0, 10.0 Hz と設定した。

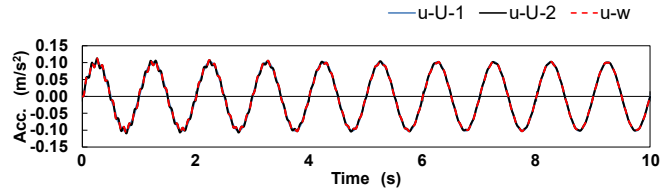
さらに、時間離散化には Newmark の  $\beta$  法を適用し、計算時間増分  $\Delta t$  および Newmark の  $\beta$  法の係数  $\beta$ ,  $\gamma$  は、 $\Delta t = 0.001 \text{s}$ ,  $\beta = 0.3025$ ,  $\gamma = 0.6$  とした。

#### 4.3.2 解析結果

透水係数が  $k = 1.0 \times 10^{-4} \text{m/s}$  のケースで得られた、地



(a) frequency : 5.0Hz



(b) frequency : 1.0Hz

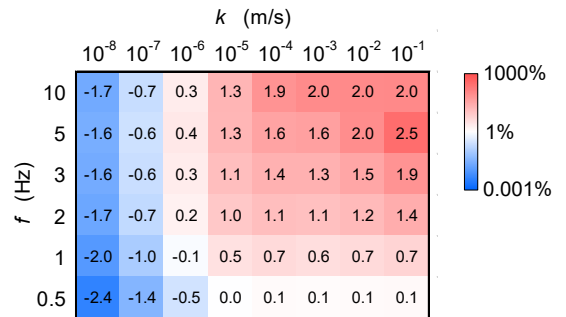
図-7 地表面における固相鉛直加速度の時刻歴 ( $k = 1.0 \times 10^{-4} \text{m/s}$ )

Fig.7 Time histories of vertical acceleration of solid phase on the ground surface

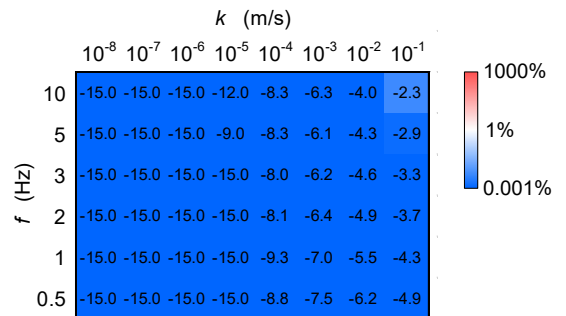
表-2 u-U-1 および u-U-2 による誤差の違い ( $k = 1.0 \times 10^{-4} \text{m/s}$ )

Table 2 Differences between errors of the u-U-1 and u-U-2

Formulation	u-U-1	u-U-2
$f = 5.0 \text{Hz}$	39.0%	$4.69 \times 10^{-9} \%$
$f = 1.0 \text{Hz}$	4.42%	$5.17 \times 10^{-10} \%$



(a) u-U-1



(b) u-U-2

図-8 u-U-1 および u-U-2 の誤差分布

Fig.8 Distributions on errors of the u-U-1 and u-U-2

表面における固相鉛直加速度  $\ddot{u}_y$  の時刻歴の一例を図-7

に示す。また、図-7 の時刻歴データに基づき、u-U-1 および u-U-2 のそれぞれについて、u-w に対する誤差  $E_r$  を式(18)によって算定し、その結果を表-2 に示す。

$$E_r = \frac{\sum_{i=1}^{n_d} |\Delta A_i|}{\sum_{i=1}^{n_d} |A_i|} \quad (18)$$

ここに、 $E_r$  : u-U-1 あるいは u-U-2 の u-w に対する誤差、 $A_i$  : 時間ステップ  $i$  における u-w のデータ、 $\Delta A_i$  : 時間ステップ  $i$  における u-U-1 あるいは u-U-2 と u-w の差、 $n_d$  : 時間ステップ数

u-U-1 については、周波数  $f=5.0\text{Hz}$  の場合に u-w の時刻歴波形と明瞭な違いが見られ、10%オーダーの誤差が生じている。u-U-2 においては、 $f=5.0\text{Hz}$ 、 $1.0\text{Hz}$  のどちらの場合も u-w による参照解とよく一致しており、u-U-1 と比べて誤差が大幅に低減している。

透水係数  $k$ 、周波数  $f$  のすべての組み合わせについて、地表面における  $\ddot{u}_y$  の u-U-1、u-U-2 の誤差分布を図-8 に整理する。ここで、図中の数値は誤差  $E_r$  の百分率の常用対数（下限値：-15.0）である。

u-U-1 については、( $k=1.0 \times 10^{-1}\text{m/s}$ ,  $f=5.0\text{Hz}$ ) における誤差が最大で 330% となっており、モデルの応答特性の影響が見られるものの、透水係数および周波数に対する誤差の依存性が比較的明瞭に認められる。一方、u-U-2 においては、表-2 よりも高透水性で高周波数の領域を含め、誤差が著しく抑制されている。今回の解析条件による誤差は、最大でも ( $k=1.0 \times 10^{-1}\text{m/s}$ ,  $f=10.0\text{Hz}$ ) において  $E_r=0.005\%$  となっている。

以上より、間隙率の不連続面を含む地盤モデルにおいて固相と液相の挙動が連成する、複雑な震動問題の場合に、u-U-2 の FE 解析によって解析精度の向上が図られることが確認された。さらに、解析結果と参照解の誤差が非常に小さいことから、u-U-2 による FE 解析は実用上の有効性が高いことも確認された。

## 5. まとめ

本研究では、u-U 定式化に基づく FE 解析を要素間の間隙率の変化が不連続となる解析モデルに適用する際の課題について、具体的な解析例とともに説明し、その解決策を提案した。解決策のポイントは、支配方程式の FEM による離散化の過程で、間隙率を節点に離散化するための間隙率マトリックス  $\bar{n}_k$  を導入し、これによって隣接面上の流量と間隙水圧の連続性を常に成立させていることにある。妥当性については、間隙率の

不連続面を含む解析モデルを用いて 1 次元問題に関するケーススタディを行い、検証した。その結果、解決策は、これによる数値解が解析精度の向上によって理論解あるいは参照解とよく一致することから、実用性の高い手法であることが確認された。

提案した u-U 定式化に基づく FE 解析は、1 次元問題に限定されず、2 次元、3 次元の問題にも適用できる。また、アイソパラメトリック要素の次数は任意に設定することが可能であり、要素形状の設定にも FEM の範疇において任意性がある。さらに、本研究のケーススタディでは要素内の間隙率を均質としたが、前述のように、間隙率が要素内で分布する場合にも適用可能である。固相の構成則についても各種の非線形モデルが使用できる。

間隙率マトリックス  $\bar{n}_k$  は、飽和度  $S_r$  で補正して構築することにより、不飽和の地盤モデルにも応用可能である。今後は、提案した FE 解析を不飽和浸透-変形連成解析に拡張して適用性を検討する予定である。

## 参考文献

- 1) Biot, M.A. : General theory of three-dimensional consolidation, *Journal of Applied Physics*, Vol.12, No.4, pp.155-164, 1941.
- 2) Biot, M.A. : Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, *Journal of Applied Physics*, Vol.26, No.2, pp.182-185, 1955.
- 3) Biot, M.A. : Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.28, No.2, pp.168-191, 1956.
- 4) Biot, M.A. : Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *Journal of Applied Physics*, Vol.33, No.4, pp.1482-1498, 1962.
- 5) (社)地盤工学会 : 地盤工学・基礎理論シリーズ 2 地盤の動的解析 -基礎理論から応用まで-, pp.88-95, 2007.
- 6) Zienkiewicz, O.C. and Shiomi, T. : Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized Biot formulation and its numerical solution, *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, Vol.8, pp.71-96, 1984.
- 7) 樋口俊一, 伊藤浩二, 佐々木智大 : 不飽和・飽和地盤の有効応力解析手法と地中構造物への適用 (その 1) -基礎式および不飽和浸透特性の検証-, 令和 3 年度土木学会全国大会第 76 回年次学術講演会, CS10-14, 2021.
- 8) Noda, T. and Toyoda, T. : Development and verification of a soil-water coupled finite deformation analysis based on u-w-p formulation with fluid convective nonlinearity, *Soils and Foundations*, Vol.59, Issue 4, pp.888-904, 2019.
- 9) Ghaboussi, J. and Wilson, E.L. : Variational formulation of dynamics of fluid saturated porous elastic solids, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, EM4, pp.947-963, 1972.
- 10) 宇野浩樹, 船原英樹 : 二相系定式化の違いが間隙率の異なる飽和互層地盤の地震時挙動に及ぼす影響, 令和 2 年度土木学会全国大会第 75 回年次学術講演会, III-136, 2020.