

混合ハイブリッド有限要素法による気液2相流解析コードの開発

小野 誠^{*1}・鈴木 俊一^{*2}

Keywords : gas-liquid two-phase flow, Mixed-Hybrid FEM, local material balance, compressible fluid

気液2相流、混合ハイブリッド有限要素法、局所物理量保存、圧縮性流体

1. はじめに

掘削を伴う地下空間利用では、地盤中の2相流れは地下環境や地表付近の生活圏が受ける影響を評価するうえで重要な検討項目である。例えば、トンネル掘削に伴う不飽和帯の形成や地下水位の低下、地下深部の天然資源回収や汚染物質の浄化等における流体置換、放射性廃棄物の地層処分における埋設施設内部でのガス発生などが、2相流れが関連する地下環境へ影響を及ぼす事象として想定される。

地盤中の地下水流动に関する評価では、数値解析によるシミュレーションが重要な役割を担うことが少なくない。従来、地下水流动を扱う解析手法としては有限体積法や有限要素法による数値解法が広く用いられてきた。有限体積法は局所物理量の保存が保証された手法であり、流体解析において有効な手法であるが、離散化メッシュの精度と流れに対する向きに影響を受けることが既往の研究で指摘されている¹⁾。一方、有限要素法は複雑な地質形状を表現するうえで適した離散化手法であるが、局所物理量の保存が保証されておらず²⁾、特に飽和度によって透過特性が変化する2相流問題への適用は限界がある。特に不均質な場では、フラックスの連続性が陽に保証されていない標準Galerkin法やPetrov-Galerkin法では、異なる媒体の境界面での非湿潤相の浸透プロセスを物理的に正確に再現できない³⁾。そこで今回開発する解析コードでは有限体積法の長所である局所物理量保存と有限要素法の長所である地質形状への適用性を併せ持つ混合ハイブリッド有限要素法⁴⁾を解析手法として採用した。

2. 混合ハイブリッド有限要素法の概要

混合ハイブリッド有限要素法は、圧力に加えて流速そのものを変数とした混合化形式であることから、圧力を微分して流速を得る通常の有限要素法・有限体積法と比較して、流速の精度が1次高い。また、流れの式（ダルシー則）にRaviart-Thomas型形状関数⁵⁾を用いた有限要素法を適用し、物理量保存式に有限体積法を適用することによって、有限要素法及び有限体積法の双方の長所を有している。つまり、局所物理量を保存し（有限体積法の長所）、任意形状の要素が適用可能（有限要素法の長所）であり、従来手法よりも精度の1次高い流速を分布として得られる（混合化形式の長所）各手法の長所を有する手法である。特に精度の高い流速ベクトル分布が得られることや、有限体積法と比較して要素分割の影響を受けにくい等の長所から、当手法は核種移行フラックスの評価に厳密な精度が求められる放射性廃棄物処分の分野⁶⁾や直接コストに反映されるため精度良い生産量の評価が求められるオイルエンジニアリングの分野⁶⁾など、不均質場において流速や流量に対して高い精度の求められる分野へ適用されている。

長所を有する一方で、当手法は数学的にやや複雑であり、流体の圧縮性や貯留の効果を無視するなどの限られた条件での適用例^{6), 6)}がほとんどである。そこで本稿では、当手法を今後の幅広い適用を目的に流体の圧縮や貯留の効果も考慮できるよう拡張し、数学的に複雑である式展開を次章以降で概説する。

3. 2相流れの定式化

本検討では混和しない濡れ相（wetting-phase；下付文字 w）と非濡れ相（non-wetting-phase；下付文字 n）の

*1 技術センター土木技術研究所地盤・岩盤研究室

*2 原子力本部原子力部

2相流れの問題を対象とする。解析領域は多孔質媒体よりなる有界領域 Ω とし、領域内の任意の位置を 3 次元直交座標系を用いて $\mathbf{x} = (x, y, z)$ で表す。また、領域境界は $\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^N$ (Γ^D … Dirichlet 境界, Γ^N … Neumann 境界) とし、Dirichlet 境界と Neumann 境界のいずれかに必ず該当するものとする。領域内の 2 相流挙動がいずれの相もダルシー則に従うものとしたとき、 α 相 ($\alpha = w, n$) の物理量保存式、ダルシー流束、初期条件、境界条件は以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha \phi S_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = f_\alpha \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\vec{v}_\alpha = -\mathbf{K}_\alpha (\nabla P_\alpha + \rho_\alpha g \nabla z) \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{K}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{K}, \lambda_\alpha = k_{ra}/\mu_\alpha \quad (3)$$

$$P_\alpha(\mathbf{x}, 0) = P_{\alpha,0}(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

$$P_\alpha = P_\alpha^D \quad \text{on } \Gamma^D \times (0, T) \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}} = \mathbf{V}_\alpha^N \quad \text{on } \Gamma^N \times (0, T) \quad (6)$$

ここで、 ρ_α は α 相の流体密度 [ML^{-3}]、 ϕ は間隙率 [–]、 S_α は α 相の飽和度 [–]、 f_α は α 相の流入出項 [$\text{ML}^{-3}\text{T}^{-1}$]、 v_α は α 相の流束ベクトル [LT^{-1}] である。ダルシー流束は各相の透過係数を $\mathbf{K}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{K}$ とした一般化した形式で表す。このとき、 \mathbf{K} は固有透過係数テンソル [L^2]、 λ_α は α 相のモビリティ ($\lambda_\alpha = k_{ra}/\mu_\alpha$)、 k_{ra} は α 相の相対透過係数 [–]、 μ_α は α 相の粘性係数 [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$]、 P_α は α 相の流体圧 [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$]、 g は重力加速度 [LT^{-2}]、 z は基準位置からの高さ [L]、である。また、 \mathbf{n} は $\partial\Omega$ 沿いの外向き単位法線ベクトル、 $P_\alpha^D(\mathbf{x}, t)$ は Dirichlet 境界条件 [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$]、 $\mathbf{V}^N(\mathbf{x}, t)$ は Neumann 境界条件 [LT^{-1}] である。

上式に加え、間隙は必ずいずれかの相で満たされると仮定し、さらに毛管圧を非濡れ相圧と濡れ相圧の差として定義し、かつ水飽和度の関数であるとみなし、以下の関係式を得る。

$$S_w + S_n = 1 \quad (7)$$

$$P_c(f(S_w)) = P_n - P_w \quad (8)$$

以上の式(1)~(8)を 2 相流れ問題の支配方程式とする。ただし、本検討で用いる混合ハイブリッド有限要素法

では、目的変数を各相の圧力 $P_\alpha(\mathbf{x})$ およびその 1 次微分であるダルシー流束 $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x})$ とする（以下、 \mathbf{x} は省略）。そこで、式(1)の物理量保存式については、左辺第 1 項を以下のように展開する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha \phi S_\alpha) &= \rho_\alpha S_\alpha (1-\phi) \left(\frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial P_\alpha} \right) \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} \\ &\quad + \rho_\alpha S_\alpha \phi \left(\frac{1}{\rho_\alpha} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial P_\alpha} \right) \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \rho_\alpha \phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} \\ &= \rho_\alpha S_\alpha C_{S\alpha} \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \rho_\alpha \phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{ただし, } C_{S\alpha} = (1-\phi)C_R + \phi C_{Fa} \quad (10)$$

ここで、 C_R は多孔質媒体の圧縮係数、 C_{Fa} は α 相を構成する流体の圧縮係数であり、 C_{Fa} は式(10)で表される係数である。さらに、式(9)については、式(7)および(8)を用いて目的変数を以下のように置き換える。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \phi S_w) = \rho_w \left(S_w C_{Sw} - \frac{\phi}{P'_c} \right) \frac{\partial P_w}{\partial t} + \frac{\rho_w \phi}{P'_c} \frac{\partial P_n}{\partial t} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_n \phi S_n) = \frac{\rho_n \phi}{P'_c} \frac{\partial P_w}{\partial t} + \rho_n \left(S_n C_{Sn} - \frac{\phi}{P'_c} \right) \frac{\partial P_n}{\partial t} \quad (12)$$

$$\text{ただし, } \frac{\partial S_w}{\partial t} = \left(\frac{\partial P_c}{\partial S_w} \right)^{-1} \frac{\partial P_c}{\partial t} = \frac{1}{P'_c} \left(\frac{\partial P_n}{\partial t} - \frac{\partial P_w}{\partial t} \right) \quad (13)$$

以上に示した式の展開より、物理量保存式(1)は以下の式(14), (15)のように相ごとに書き表すことができる。なお、式が煩雑になるため、式(16)~(19)のように係数を略記する。次章では空間離散化について述べる。

$$A_{11} \frac{\partial P_w}{\partial t} + A_{12} \frac{\partial P_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \vec{v}_w) = f_w \quad (14)$$

$$A_{21} \frac{\partial P_w}{\partial t} + A_{22} \frac{\partial P_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \vec{v}_n) = f_n \quad (15)$$

$$\text{ただし, } A_{11} = \rho_w (S_w C_{Sw} - \phi/P'_c) \quad (16)$$

$$A_{12} = \rho_w \phi / P'_c \quad (17)$$

$$A_{21} = \rho_n \phi / P'_c \quad (18)$$

$$A_{22} = \rho_n (S_n C_{Sn} - \phi/P'_c) \quad (19)$$

4. 混合ハイブリッド有限要素法による2相流れ問題の空間離散化

本稿では、有界領域 Ω を空間に関して離散化し、 N_K 個の要素によって構成される領域を T_h と定義する。また、要素境界のうち Dirichlet 境界に該当する要素境界を除く、 N_E 個の要素境界の集合を ε_h と定義する。

$$T_h \subset \Omega , K_1, \dots, K_{N_K} \in T_h \quad (20)$$

$$\varepsilon_h \subset \partial K' \cup \Gamma^N , E_1, \dots, E_{N_E} \in \varepsilon_h \quad (21)$$

ここで、 K は要素、 E は要素境界を表す。また、 K' は隣接要素を表すものとし、 $\partial K'$ は他要素に隣接する要素境界とする。以降、空間離散化とマトリクス方程式について、簡単のため 2 次元矩形要素を例にして記す。

4.1 ダルシ一流束に関する空間離散化

ダルシ一流束についての空間離散化は、式(2)に対し重み関数 χ_h を乗じて体積積分し、さらに要素境界上の圧力 TP_α を未知数として導入して部分積分を適用すると、以下のように表すことができる。

$$\int_{\Omega} (\mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{V}_{h\alpha}) \cdot \chi_h d\Omega = \int_{\Omega} P_{h\alpha} \nabla \cdot \chi_h d\Omega - \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} (TP_{h\alpha} \bar{\mathbf{n}}_K) \cdot \chi_h dl - \int_K (\rho_\alpha g \nabla z) \cdot \chi_h d\Omega \quad (22)$$

ここで、 $\mathbf{V}_{h\alpha}$ 、 $P_{h\alpha}$ 、 $TP_{h\alpha}$ は α 相ダルシ一流束、要素中心位置の α 相圧力、要素境界上の α 相圧力それぞれの近似解を表し、 χ_h は重み関数である。これらの詳細についてはマトリクス方程式を作成する際に後述する。

4.2 物質量保存式に関する空間離散化

物理量保存式は、目的変数を圧力に切り替えた式(14)、(15)に対し、重み関数 φ_h を乗じて体積積分することによって、以下のように相ごとに表すことができる。

$$\int_{\Omega} A_{11} \frac{\partial P_{hw}}{\partial t} \varphi_h d\Omega + \int_{\Omega} A_{12} \frac{\partial P_{hn}}{\partial t} \varphi_h d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{V}_{hw}) \varphi_h d\Omega = \int_{\Omega} f_w \varphi_h d\Omega \quad (23)$$

$$\int_{\Omega} A_{21} \frac{\partial P_{hw}}{\partial t} \varphi_h d\Omega + \int_{\Omega} A_{22} \frac{\partial P_{hn}}{\partial t} \varphi_h d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho_n \mathbf{V}_{hn}) \varphi_h d\Omega = \int_{\Omega} f_n \varphi_h d\Omega \quad (24)$$

なお、重み関数 φ_h の詳細については、マトリクス方程式を作成する際に後述する。

4.3 Neumann 境界の組み込み

流束が既知である Neumann 境界については、式(6)に重み関数 λ_h を乗じて線積分し、Neuman 境界に該当する要素境界のみの和として以下のよう整理できる。

$$\sum_{K \in T_h} \int_{\partial K \subset \Gamma^N} \mathbf{V}_{h\alpha} \cdot \mathbf{n}_K \lambda_h dl = \int_{\partial \Omega} \mathbf{V}_\alpha^N \lambda_h dl \quad (25)$$

なお、重み関数 λ_h の詳細については、マトリクス方程式を作成する際に後述する。

5. 混合ハイブリッド有限要素法による2相流れ問題のマトリクス方程式

目的変数の 1 つであるダルシ一流束は要素境界上の中心位置に与えるものとする。ここで、要素数 N_K と 1 要素あたりの要素境界数 N_e の積を N_{Ke} とし、以下のように N_{Ke} 次ベクトルとして定める。

$$\mathbf{V}_\alpha = [\mathbf{V}_{\alpha,K}]_{N_K} = [v_{\alpha,K,E}]_{N_{Ke} (= N_K \times N_e)} \quad (26)$$

このとき、要素 K 内の任意の位置 \mathbf{x} における、ダルシ一流束 \mathbf{v}_α の近似解 $\mathbf{V}_{h\alpha}$ は、Raviart-Thomas 型形状関数 \mathbf{W}_K を用いて以下のように表すことができる。

$$\mathbf{V}_{h\alpha}(\mathbf{x}) = \sum_{K \in T_h} \sum_{E \subset \partial K} v_{\alpha,K,E} \bar{\mathbf{w}}_{K,E}(\mathbf{x}) , \mathbf{x} \in K \quad (27)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{w}_K = [\bar{\mathbf{w}}_{K,E}]_{N_e} \quad (28)$$

なお、Raviart-Thomas 型形状関数は、辺長が 1 に正規化された 2 次元正方形要素の場合、以下のようにになる。

$$\bar{\mathbf{w}}_{K,1} = \begin{bmatrix} x-1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{w}}_{K,2} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{w}}_{K,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ y-1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{w}}_{K,4} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \quad (29)$$

また、Galarkin 法と同様に、式(22)における重み関数 χ_h を以下のように定める。ここで、 q_E^* は任意のスカラー値である。

$$\chi_h = \sum_{K \in T_h} \chi_{h,K} = \sum_{K \in T_h} (\mathbf{q}^* \cdot \mathbf{w}_K) = \sum_{K \in T_h} \sum_{E \subset \partial K} q_E^* \bar{\mathbf{w}}_{K,E} \quad (30)$$

次に、要素内の α 相圧力 P_α や要素境界上の α 相圧力 TP_α の近似解は以下のように表し、空間離散化に

併い要素中心および要素境界中心の圧力を代表値として平均的に表すものとする。

$$P_{h\alpha}(\mathbf{x}) = \sum_{K' \in T_h} P_{\alpha,K'} \varphi_{K'}(\mathbf{x}) = P_{\alpha,K} \quad (31)$$

$$TP_{h\alpha}(\mathbf{x}) = \sum_{E' \in T_h} TP_{\alpha,E'} \lambda_{E'}(\mathbf{x}) = TP_E \quad (32)$$

$$\text{ただし } \varphi_K = \delta_{K,K'}, \quad \mathbf{x} \in K, \quad K, K' \in T_h \quad (33)$$

$$\lambda_E = \delta_{K,K'}, \quad \mathbf{x} \in K, \quad K, K' \in T_h \quad (34)$$

以上より、離散化された領域 T_h において求めるべき目的変数であるダルシー流束、要素境界圧力、要素中心圧力をすべての要素を対象に、さらに2相まとめて記すと以下のように表される。

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_w \quad \mathbf{V}_n]^T, \quad \mathbf{V}_\alpha = [v_{\alpha,K,E}]_{N_{Ke}} \quad (35)$$

$$\mathbf{TP} = [\mathbf{TP}_w \quad \mathbf{TP}_n]^T, \quad \mathbf{TP}_\alpha = [TP_{\alpha,E}]_{N_E} \quad (36)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_w \quad \mathbf{P}_n]^T, \quad \mathbf{P}_\alpha = [P_{\alpha,K}]_{N_K} \quad (37)$$

これらを用いて、離散化された支配方程式である式(22)～(25)をマトリクス形式にする。式展開の仔細については後述するものとし、結果から先に示すと、混合ハイブリッド有限要素法による2相流れ問題のマトリクス方程式は以下のように表される。

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{V} + \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{TP} - \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{P} = -\mathbf{F}_1 \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{T}\boldsymbol{\rho}^T \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{V} = \mathbf{F}_2 \quad (39)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{V} = \mathbf{F}_3 \quad (40)$$

ここで、式(38)はダルシー則を、式(39)は物理量保存式を、式(40)は Neumann 境界条件をそれぞれマトリクス形式にしたものである。なお、式(38)の左辺および右辺の各マトリクス／ベクトルは下記のように成分表記される。

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_n \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\text{ただし}, \quad \mathbf{B}_\alpha = [\mathbf{B}_{\alpha,K}]_{N_{Ke}, N_{Ke}} \quad (\alpha = w, n) \quad (42)$$

ここで、 \mathbf{B}_α は以下の $N_e \times N_e$ の対角行列の $\mathbf{B}_{\alpha,K}$ を小行列とする $N_{Ke} \times N_{Ke}$ ブロック対角行列である。

$$\mathbf{B}_{\alpha,K} = \left[\left(B_{\alpha,K} \right)_{E,E'} \right]_{N_e, N_e},$$

$$\left(B_{\alpha,K} \right)_{E,E'} = \int_K \left(\mathbf{K}_\alpha^{-1} \bar{\mathbf{w}}_{K,E} \right) \cdot \bar{\mathbf{w}}_{K,E'} d\mathbf{x} \quad (43)$$

$$\text{同様に}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,w} & \mathbf{F}_{1,g} \end{bmatrix}^T, \quad (\alpha = w, n) \quad (46)$$

ここで、 \mathbf{R} は式(47)のように構成される $N_{Ke} \times N_E$ の行列、 \mathbf{S} は式(48)のように構成される $N_{Ke} \times N_K$ の行列、 $\mathbf{F}_{1,\alpha}$ は式(49)のように構成される N_{Ke} 次ベクトルである。

$$\mathbf{R} = \left[R_{E,E'} \right]_{N_{Ke}, N_E}, \quad \left(R_{E,E'} \right)_{E \subset \partial K} = \int_{E' \in \mathcal{E}_h} \bar{\mathbf{w}}_{K,E} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{K,E'} dl \quad (47)$$

$$\mathbf{S} = \left[S_{E,K} \right]_{N_{Ke}, N_K}, \quad S_{E,K} = \int_K \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}_{K,E} d\mathbf{x} \quad (48)$$

$$\mathbf{F}_{1,\alpha} = \left[F_{1,\alpha,E} \right]_{N_{Ke}}, \quad F_{1,\alpha,E} = \int_{E \subset \Gamma^D} P_\alpha^D \bar{\mathbf{n}}_{K,E} \cdot \bar{\mathbf{w}}_{K,E} dl + \int_K \left(\rho_{\alpha,K} g \nabla z_K \right) \cdot \bar{\mathbf{w}}_{K,E} d\mathbf{x} \quad (49)$$

式(39)および(40)についても同様に、

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{T}\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}\boldsymbol{\rho}_w & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}\boldsymbol{\rho}_n \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{2,w} & \mathbf{F}_{2,g} \end{bmatrix}^T \quad (53)$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{3,w} & \mathbf{F}_{3,g} \end{bmatrix}^T \quad (54)$$

ここで、 \mathbf{M} は式(55)のように構成される $N_K \times N_K$ の行列、 $\mathbf{A}_{11} \sim \mathbf{A}_{22}$ は各々式(56)～(59)のようにクロネッカーデルタを用いて記される $N_K \times N_K$ の対角行列、 $\mathbf{T}\boldsymbol{\rho}_\alpha$ は要素境界上における α 相の流体密度からなる $N_E \times N_K$ の行列、 $\mathbf{F}_{2,u}$ は出入入を表す N_K 次ベクトル、 $\mathbf{F}_{3,u}$ は Neumann 境界とフラックスの連続性を表す N_E 次ベクトルである。

$$\mathbf{M} = [M_{K,K}]_{N_K, N_K}, \quad M_{K,K} = \int_K d\mathbf{x} \quad (55)$$

$$\mathbf{A}_{11} = [A_{11,K} \delta_{K,K'}]_{N_K, N_K}, \quad A_{11,K} = \rho_{w,K} (S_{w,K} C_{Sw,K} - \phi_K / P'_{c,K}) \quad (56)$$

$$\mathbf{A}_{12} = [A_{12,K} \delta_{K,K'}]_{N_K, N_K}, \quad A_{12,K} = \rho_{w,K} \phi_K / P'_{c,K} \quad (57)$$

$$\mathbf{A}_{21} = [A_{21,K} \delta_{K,K'}]_{N_K, N_K}, \quad A_{21,K} = \rho_{n,K} \phi_K / P'_{c,K} \quad (58)$$

$$\mathbf{A}_{22} = [A_{22,K} \delta_{K,K'}]_{N_K, N_K}, \quad A_{22,K} = \rho_{n,K} (S_{n,K} C_{Sn,K} - \phi_K / P'_{c,K}) \quad (59)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{\rho}_\alpha = [T\rho_{\alpha,E,K}]_{N_E, N_K} \quad (60)$$

$$\mathbf{F}_2 = [F_{2,K}]_{N_K}, \quad F_{2,\alpha,K} = \int_K f_\alpha d\mathbf{x} \quad (61)$$

$$\mathbf{F}_{3,\alpha} = [F_{3,\alpha,E}]_{N_E}, \quad F_{3,\alpha,E} = \int_{E \in \mathcal{E}_h} \mathbf{V}_\alpha^N dl \quad (62)$$

ただし、フラックスの連続性より、

$$\mathbf{V}_\alpha^N = \begin{cases} v_\alpha^N & \text{if } E \in \Gamma^N \\ v_{\alpha,K,E} + v_{\alpha,K',E} = 0 & \text{if } E \in K \cap K' \end{cases} \quad (63)$$

以降、順次マトリクス方程式への展開について概説する。はじめに、ダルシーフlow束の式(38)への展開について記す。空間離散化した式(22)を要素単位に記す。その際、要素境界上の圧力 TP は、Dirichlet 境界上は既知であるため区別すると以下の式(64)のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_K (\mathbf{K}_{\alpha,K}^{-1} \mathbf{V}_{\alpha,K} \cdot \mathbf{w}_K) \cdot (\mathbf{q}_K^* \cdot \mathbf{w}_K) d\mathbf{x} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (TP_{\alpha,K,E} \bar{\mathbf{n}}_{K,E}) \cdot (\mathbf{q}_K^* \cdot \mathbf{w}_K) dl \\ & - \int_\Omega P_{\alpha,K} \nabla \cdot (\mathbf{q}_K^* \cdot \mathbf{w}_K) d\mathbf{x} \\ & = - \sum_{E \in \Gamma^D} \int_E (P_\alpha^D \bar{\mathbf{n}}_{K,E}) \cdot (\mathbf{q}_K^* \cdot \mathbf{w}_K) dl - \int_K (\rho_{\alpha,K} g \nabla z_K) \cdot (\mathbf{q}_K^* \cdot \mathbf{w}_K) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (64)$$

上式の各項を整理すると、以下の式(65)～(68)となる。

$$\int_K (\mathbf{K}_{\alpha,K}^{-1} \mathbf{V}_{\alpha,K} \cdot \mathbf{w}_K) \cdot (\mathbf{q}_K^* \cdot \mathbf{w}_K) d\mathbf{x} = \mathbf{q}_K^{*T} \left[\int_K (\mathbf{K}_{\alpha,K}^{-1} \mathbf{w}_K) \cdot \mathbf{w}_K d\mathbf{x} \right] \mathbf{V}_{\alpha,K} \quad (65)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (TP_{\alpha,K,E} \bar{\mathbf{n}}_{K,E}) \cdot (\mathbf{q}_K^* \cdot \mathbf{w}_K) dl = \mathbf{q}_K^{*T} \left[\int_{\partial K} \mathbf{w}_K \cdot \mathbf{n}_K dl \right] \mathbf{TP}_{\alpha,K} \quad (66)$$

$$\int_\Omega P_{\alpha,K} \nabla \cdot (\mathbf{q}_K^* \cdot \mathbf{w}_K) d\mathbf{x} = \mathbf{q}_K^{*T} \left[\int_K \nabla \cdot \mathbf{w}_K d\mathbf{x} \right] P_{\alpha,K} \quad (67)$$

$$\sum_{E \in \Gamma^D} \int_E (P_\alpha^D \bar{\mathbf{n}}_{K,E}) \cdot (\mathbf{q}_K^* \cdot \mathbf{w}_K) dl + \int_K (\rho_{\alpha,K} g \nabla z_K) \cdot (\mathbf{q}_K^* \cdot \mathbf{w}_K) d\mathbf{x}$$

$$= \mathbf{q}_K^{*T} \left[\int_{\partial K} P_{\alpha,E}^D \mathbf{w}_K \cdot \mathbf{n} dl + \int_K (\rho_{\alpha,K} g \nabla z_K) \cdot \mathbf{w}_K d\mathbf{x} \right] \quad (68)$$

ここで、式(43)～(46)を適用するとともに、 \mathbf{q}_K^* が任意であることから、先述のマトリクス型方程式が得られる。

次に、物理量保存式について式(23)を例にして示す。目的変数である P_α と $A_{11} \sim A_{22}$ は空間離散化によって、要素ごとの代表値であるとみなすことができるため、左辺第1項と第2項は以下のようになる。

$$\int_\Omega \left(A_{11} \frac{\partial P_{hw}}{\partial t} + A_{12} \frac{\partial P_{hn}}{\partial t} \right) \varphi_h d\Omega = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \left(\int_K d\mathbf{x} \left(A_{11,K} \frac{\partial P_{w,K}}{\partial t} + A_{12,K} \frac{\partial P_{n,K}}{\partial t} \right) \right) \right\} \quad (69)$$

左辺第3項は、ガウスの定理を適用し、要素境界上の流体密度 $T\rho_\alpha$ を導入することで以下のようになる。

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{V}_{hw}) \varphi_h d\Omega &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \subset \partial K} \left(\int_E (\mathbf{p} \mathbf{V}_h)_K \cdot \bar{\mathbf{n}}_{K,E} \varphi_h dl \right) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{T}\mathbf{\rho}_{w,K})^T \left(\int_{\partial K} \mathbf{w}_K \mathbf{n}_K^T dl \right)^T \mathbf{V}_{w,K} \end{aligned} \quad (70)$$

右辺は出入り項であり要素ごとに以下のように表す。

$$\int_\Omega f_w \varphi_h d\Omega = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f_\alpha d\mathbf{x} \quad (71)$$

式(69)～(71)を基に、式(44)以降のマトリクスも適用し、非濡れ相も含めて整理すると、先述のマトリクス型方程式が得られる。

最後に Neumann 境界については、式(25)に対して、式(63)を考慮すると以下の式(72)のように表され、これを基に式(44), (47), (62), (63)を適用して先述のマトリクス型方程式が得られる。

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_{\partial K} \mathbf{w}_K \cdot \mathbf{n}_K dl \right)^T \mathbf{V}_{\alpha,K} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mathbf{V}_\alpha^N dl \quad (72)$$

上記のようにして得られた混合ハイブリッド有限要素法によるマトリクス方程式は係数内に未知数を含む非線形方程式である。よって、反復計算によって最適解が得られる。次章では開発したコードの妥当性を、理論的に導かれる準解析解との比較と既往の解析コードとの比較によって検証する。

6. 開発したコードの検証

6.1 準解析解との比較

6.1.1 Mc Whorter 問題の概要

McWhorter and Sunada(1990)⁸⁾は非圧縮性流体を対象に、毛管圧力を考慮した水平一次元系での動的な2相置換問題を準解析的に解いた。非圧縮2相系を一般化した偏微分方程式は以下のようになる。

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + q_t \frac{df_w}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{D} \frac{\partial S_w}{\partial x} \right) \quad (73)$$

$$\text{ただし, } q_t(x,t) = q_w(x,t) + q_n(x,t) \quad (74)$$

$$\mathbf{D}(S_w) = \frac{k_m \mathbf{K} f_w}{\mu_w} \frac{dP_c}{dS_w} \quad (75)$$

ここで、 $q_a(x,t)$ は α 相の体積フラックスであり、 f_w は比透過性関数である。境界条件と初期条件を、

$$q_0 = q_w(0,t) = At^{-\frac{1}{2}} \quad (76)$$

$$S_w(\infty, t) = S_w(x, 0) = S_i \quad (77)$$

としたとき、McWhorter and Sunada(1990)で導出された準解析解は以下のとおりである。

$$q_w(\mathbf{D}, t) = \left[\frac{\phi}{2} \left\{ \frac{1}{(1-f_i R)^2} \int_{S_i}^{S_0} \frac{(S_w - S_i)}{F - f_n} dS_w \right\} \right]^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \quad (78)$$

$$\text{ただし, } f_i = f(S_i) = \left(1 + \frac{k_m(S_i) \mathbf{K} \mu_w}{k_n(S_i) \mathbf{K} \mu_n} \right)^{-1} \quad (79)$$

$$f_n = (f_w - f_i)R / (1 - f_i R) \quad (80)$$

$$R = q_t / q_0 \quad (81)$$

なお、 A は準解析的に得られる S_0 の関数であり、入口側の供給流量を与えるものである。

6.1.2 解析条件

下記の条件で得られる準解析解と混合ハイブリッド有限要素法を用いた開発したコードによって得られる解を比較することで検証する。解析に用いたパラメータを表-1に示す。なお、McWhorter 問題においては、経時変化する入口側の供給フラックスが準解析的に得られ、図-1に示すような時間の関数として与える。

6.1.3 解析結果

図-2 に水飽和度分布の形状の変化について、開発したコードを用いて、上記条件にて実施した解析結果と、McWhorter and Sunada (1990)の準解析解を併せて示す。図に示すように、飽和度進展の時間変化について

数値解と解析解とはよく一致しており、開発したコードの妥当性が示された。

表-1 McWhorter 問題におけるパラメーター一覧

Table 1 Parameter list for McWhorter problem

名称	記号	値	単位
流体密度	ρ_w, ρ_n	2相とも 1,000	kg/m ³
粘性係数	μ_w, μ_n	2相とも 0.001	Pa·s
固有透過係数	K	10^{-10}	m ²
間隙率	φ	0.30	
相対透過係数	$k_r(S_w)$	Brooks-Corey モデル*	
毛管圧力	$p_c(S_w)$	Brooks-Corey モデル*	Pa
孔径分布指標	λ	2.00	
侵入圧力	p_d	5000	Pa
残留飽和度	S_{wr}, S_{nr}	2相とも 0.00	
メッシュサイズ	Δx	0.01	m
領域長さ	L	260	m
時間ステップ	Δt	100	秒
解析時間	T	10,000	秒
入口側境界条件	(x=0)	Flux は図-1 参照	
湿潤相の飽和度	S_w	1.0	
非湿潤相の圧力	p_n	2.0×10^5	Pa
初期条件			
初期湿潤相飽和度	S_{w0}	0.01	

* Brooks-Corey モデル

$$\text{毛管圧 : } S_e = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr}} = \left(\frac{p_d}{p_c} \right)^\lambda \quad (82)$$

$$\text{相対透過係数 : } k_{rw} = S_e^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}} \quad (83)$$

$$k_m = (1 - S_e)^2 \left(1 - S_e^{\frac{2+\lambda}{\lambda}} \right) \quad (84)$$

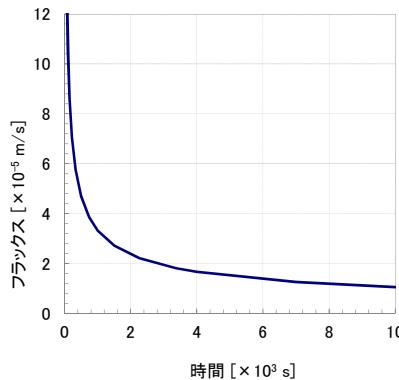


図-1 McWhorter 問題の x=0 における境界体積フラックス

Fig.1 Time dependent Neumann boundary condition at x=0

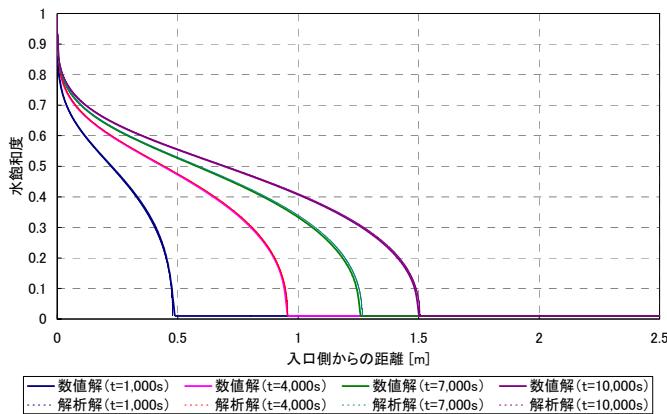


図-2 McWhorter 問題における飽和度形状の比較

Fig.2 Comparison of water saturation development

6.2 Water Flood 問題

2 相流れにおける離散化手法の格子依存性の検証解析としてよく用いられる Water Flood 問題⁹⁾について試験を実施した。解析条件の詳細は参考文献 10)を参照いただきものとし、以下にその概要を示す。本検討では正方形の 2 次元平面領域のうち、中央を低透水領域とする不均一場において、領域全体がある流体で満たされた状態を初期状態とし、その状態で端部から水を注入して、別の端部から初期に領域を満たしていた流体を回収するいわゆる水攻法の計算を実施した。なお、

解析結果の比較対照として、2 相流解析で実績のある有限体積法コードの TOUGH2¹¹⁾および有限要素法コードの CODE_BRIGHT¹²⁾で実施した解析結果と比較した。

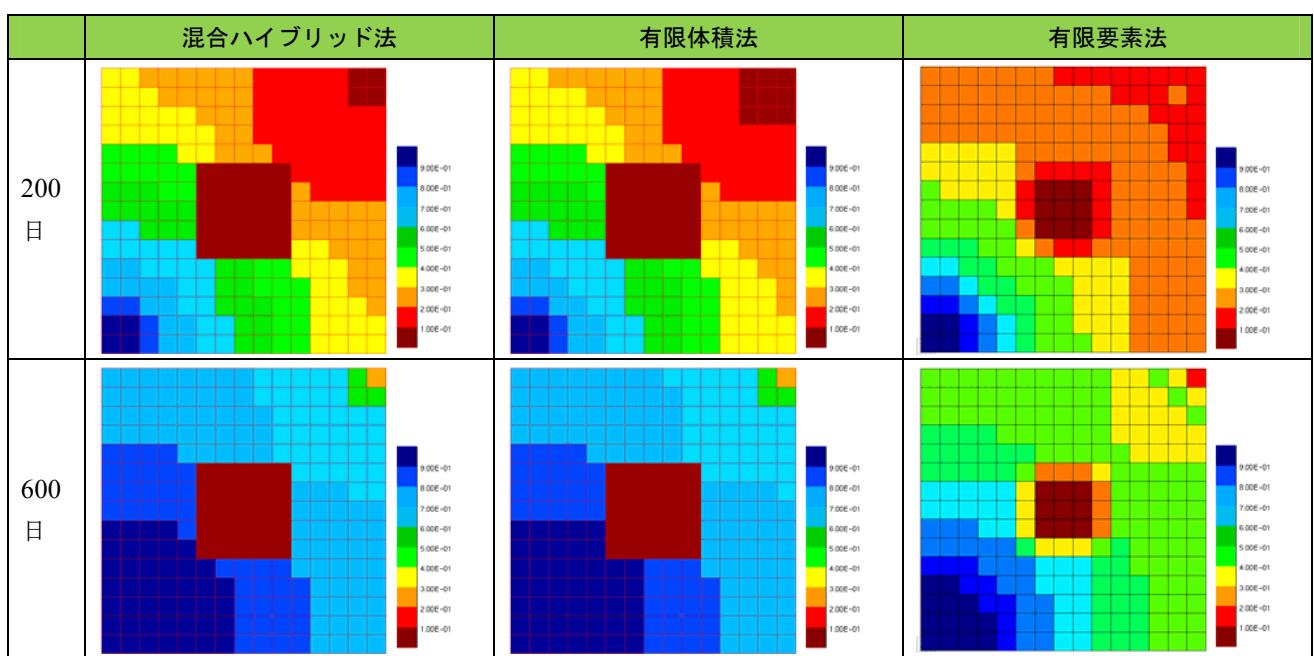
解析結果のうち 2 相流体の置換の結果得られる水飽和度分布について、3 種類の解析コードで実施した結果を表-2 に示す。主な考察を以下に示す。

領域中央の低透水領域への水の浸入は非常に少ないことが想定されるが、有限要素法の結果では高透水の部分と接している要素で飽和度が上昇しており、そのため他の 2 手法とは飽和度分布が異なる結果が得られた。これは、有限要素法では節点にしか情報を持たないため、高透水部と低透水部で節点が共有されていることによって、境界に接する要素が影響を受けてしまった結果である。このように 2 相流れでは飽和度によって各相の透過性が変わってしまうため、わずかな不均一性でも通常の有限要素法では影響が大きいことが確認された。

混合ハイブリッド有限要素法と有限体積法はいずれも離散化した要素ごとのマスバランスを満足するため差異は小さいが、わずかにフロントの形状に差が見られ、前者がより放射状に近い分布となっている。流向と正方格子の向きが平行でなくとも混合ハイブリッド有限要素法は影響を受けにくいことが確認できた。

表-2 試解析結果の比較（水飽和度）

Table 2 Comparison of water saturation distribution



7. まとめ

非線形性の強い気液2相流れの問題を精度良くかつ実用的に解くため、混合ハイブリッド有限要素法を用いた気液2相流解析コードを開発した。本検討では既往の検討事例では省力されてきた流体や媒体の圧縮性をいざれも考慮できるような式展開を行なっており、その数学的な理論について概要を示した。

開発したコードの検証のため、McWhorter問題の準解析解との比較を行ない、開発したコードで得られる数値解が理論的に得られる準解析解とほぼ一致することを確認した。さらにWater Flood問題を試解析として実施し、開発したコードの解析結果を既往の解析コードの結果と比較した。局所物理量保存が保証されない通常の有限要素法は、透過性が不均一である影響を受けたが、混合ハイブリッド有限要素法と有限体積法ではその影響は見られなかった。一方、水の流れの方向と要素分割の方向が一致していない箇所では、混合ハイブリッド有限要素法と有限体積法との間で差異が生じており、空間離散化におけるメッシュ分割に対する混合ハイブリッド有限要素法の優位性が示される結果となった。

今後は当手法の持つ解析精度面での優位性が要求されるような実プロジェクトへ適用できるよう、開発したコードの改良と拡張を進めていく予定である。

謝辞

コード開発においては、プログラミングの面で（株）テクノアルファ 久保 紳 氏に大いに御尽力いただきました。改めてここに謝意を表します。

参考文献

- 1) たとえば、Hurtado et al. : On the factors influencing the grid orientation effect in reservoir simulation, 19th International Congress of Mechanical Engineering, 2007
- 2) たとえば、Putti, M. and Sartoretto, F : Linear Galerkin vs mixed finite element 2D flow fields, Int. J. Numer. Meth. Fluids 2009; 60:1011–1031
- 3) ライナー・ヘルミック（平田健正／樋山和男 監訳）：『地下環境での多相流と輸送現象—現象理解の基礎から数値解析までー』、シュプリンガー・フェアラーク東京, 2004.
- 4) Brezzi, F. and Fortin, M. : Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 1991
- 5) Raviart, P.A. and Thomas, J.M. : A mixed finite element method for second order elliptic problems, in Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lecture Notes in Math., vol. 606, Springer-Verlag, New York, 1977, pp. 292–315.
- 6) Hoteit, H., Ackerer, Ph. and Mose, R.: Nuclear waste disposal simulations: Complex test cases, Computational Geosciences, Vol.8, pp. 99-124, 2004
- 7) Hoteit, H and Firoozabadi, A : Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable media with different capillarity pressures, Advances in Water Resources 31, 2008, pp. 56–73
- 8) McWhorter, D.B. and Sunada, D.K. : Exact Integral Solutions for Two-Phase Flow, Water Resource Reserch, Vol.26, No.3, 1990
- 9) Spivak et al. : Solution of the equations for multidimensional, Two-Phase, Immiscible Flow by Variational Methods, Society of Petroleum Engineers Journal, Vol.2, pp.27-41, 1977
- 10) 小野ほか：混合ハイブリッド有限要素法の2相流解析への適用、日本地下水学会 2011年春季講演会講演要旨, pp.22-27, 2011
- 11) Pruess, K. : TOUGH2 - A General Purpose Numerical Simulator for Multiphase Fluid and Heat Flow, Lawrence Berkeley Laboratory Report LBL-29400, Berkeley, CA, 1991.
- 12) Olivella, S., Carrera, J., Gens, A. and Alonso, E.E., “Non-isothermal multiphase flow of brine and gas through saline media”, Transport in Porous Media, Vol. 15, pp. 271-93, 1994.